CURSO DE INVERNO DE MATEMÁTICA BÁSICA 2013

Programa de Pós-Graduação em Física

Pró-Reitoria de Ensino de Graduação/UFSC

Pró-Reitoria de Ensino de Pós-Graduação/UFSC

Projeto REUNI – Reestruturação e Expansão das Universidades Federais

CURSO DE INVERNO DE MATEMÁTICA BÁSICA 2013

Apostila elaborada por (Programa de Pós-Graduação em Física da UFSC):
Giovanni Formighieri
Eduardo Muller
Luana Carina Benetti
Renan Cunha de Oliveira
André Felipe Garcia

Coordenação:
Giovanni Formighieri

Supervisão:
Prof. Dr. Marcelo Henrique Romano Tragtenberg
(Departamento e Programa de Pós-Graduação em Física da UFSC)

Conteúdo e ministrantes:
05/08/2013 - Fatoração, Frações, Potenciação e Radiciação (Eduardo Muller)
06/08/2013 - Equações, Inequações, Sistemas de Eq. e Polinômios (Giovanni Formighieri)
07/08/2013 - Funções I (Luana Carina Benetti)
08/08/2013 - Funções II (Renan Cunha de Oliveira)
09/08/2013 - Trigonometria (André Felipe Garcia)

Programa de Pós-Graduação em Física
Pró-Reitoria de Ensino de Graduação/UFSC
Pró-Reitoria de Ensino de Pós-Graduação/UFSC
Projeto REUNI – Reestruturação e Expansão das Universidades Federais

Módulo 1: Fatoração, Frações, Potenciação e Radiciação

1. Fatoração

Fatorar numericamente é decompor um número em um produto de outros números, chamados fatores. O número 24 pode ser fatorado como sendoo produto entre os números 2 e 12 (2 x 12 = 24); 3 e 8 (3 x 8 = 24); ou até mesmo 2 e 6 e 2 novamente (2 x 2 x 6 = 24). A **fatoração completa** ocorre quando um número é decomposto no maior número possível de fatores. Isto ocorre quando escrevemos este número somente através da multiplicação de números primos. Números primos são aqueles que podem ser divididos somente por um e por ele mesmo.

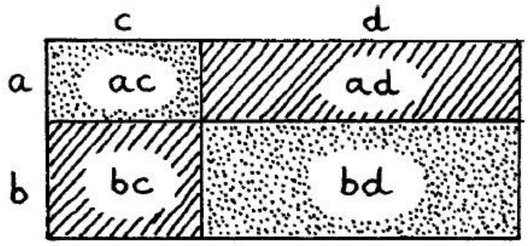
<u>Exemplos 1:</u>
a) $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$
b) $10 = 2 \times 5$
c) $52 = 2 \times 2 \times 13$
d) $112 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 7$
e) $600 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5$

Fatoração algébrica consiste em escrever determinada expressão algébrica na forma do produto entre duas ou mais expressões algébricas.

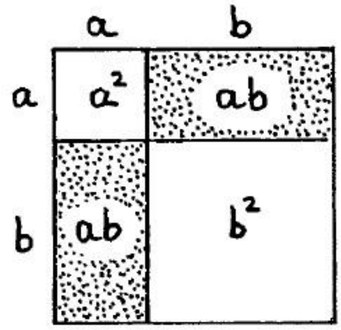
<u>Exemplos 2:</u>
a) $3a^2 + 2ab = a(3a + 2b)$
b) $3p^2q + 4pq^2 = pq(3p + 4q)$
c) $4a^2b^3 - 6a^3b^2 = 2a^2b^2(2b + 3a)$

Os exemplos acima contêm expressões contidas dentro de parênteses. Eventualmente temos expressões com produtos de mais de um parêntese. Para **multiplicarmos dois parênteses**, cada termo do primeiro parênteses deve multiplicar cada termo do segundo parênteses, assim:

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$



$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$$
$$= a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



Do mesmo modo, podemos obter que:

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b)$$
$$= a^2 - 2ab + b^2$$

e

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Este último resultado é chamado **diferença de dois quadrados**.

<u>Exercícios Propostos:</u>

Fatore:
a) 12 =
b) 65 =
c) 500 =
d) $5a + 10b =$
e) $5xy + 8xz =$
f) $4pq^2 - 6p^2q =$
g) $2a^2b^3 + 3a^3b^2 - 6a^2b^2 =$

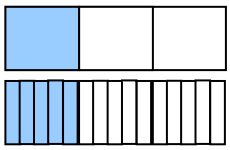
2. Frações

Número fracionário é o número resultante da razão de dois números inteiros. Dados os números inteiros **a** e **b**, a representação geral de uma fração é dada por $\frac{a}{b}$, onde temos que o número inteiro **a** é chamado de numerador, e o número inteiro **b** é chamado de denominador e é diferente de zero. Esta última consideração se deve pois um número dividido por 0 é indeterminado.

Quando dividimos ou multiplicamos o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número, diferente de zero, sempre obtemos uma fração equivalente à fração dada.

Ex.: $\frac{1}{3}.\frac{5}{5} = \frac{5}{15}$ e $\frac{5}{15} \div \frac{5}{5} = \frac{1}{3}$

Logo $\frac{5}{15}$ e $\frac{1}{3}$ são frações equivalentes.



$\frac{1}{3}$ $\frac{5}{15}$ São frações equivalentes, pois representam a mesma parte de um inteiro.

Outro exemplo, um pouco mais geral, seria:

$$\frac{2 \times 2}{3 \times 2} = \frac{2a}{3a} = \frac{2}{3}$$

2.1 Transformação de Número Fracionário em Número Decimal

Basta dividir o numerador pelo denominador.

Exemplos 3:

a) $\frac{1}{5} = 1:5 = 0{,}2$

b) $\frac{20}{3} = 6{,}66...$

2.2 Transformação de Número Decimal em Número Fracionário

Para transformar um número decimal em número fracionário, toma-se o número que se obtém desprezando zeros à esquerda e a vírgula, e dividir por 10, 100, 1000..., ou seja o algarismo um seguido de um número de zeros igual ao número de casas após a virgula.

Exemplos 4:

a) $0{,}4 = \frac{4}{10} = \frac{4 \div 2}{10 \div 2} = \frac{2}{5}$

b) $-2{,}3 = -\frac{23}{10}$

c) $0{,}612 = \frac{612}{1000} = \frac{612 \div 2}{1000 \div 2} = \frac{306}{500} = \frac{153}{250}$

d) $14{,}3 = \frac{143}{10}$

e) $0{,}15 = \frac{15}{100} = 15\%$

Caso o decimal for uma dízima paródica, o processo é um pouco mai complicado. Nesse caso, escrevemos a dízima como uma soma S de números decimais. Feito isso, multiplicamos essa soma por um número 10^N, onde N corresponderá ao número de casas decimais do primeiro decimal da soma S. Em seguida, faz-se a subtração da soma multiplicada pela soma definida. Vejamos um exemplo de como isso ocorre.

Exemplos 5:

a) Transforme a dízima 0,6666... em decimal.

Solução:
Escrevemos a dízima como uma soma S

$$S = 0{,}6+0{,}06+0{,}006+... \qquad (1)$$

Multiplicamos a soma acima por 10^N, onde N

= 1 é o número de casas decimais do primeiro decimal da soma. O resultado será

10S = 6+0,6+0,06+0,006+... (2)

Fazemos a subtração de (2) por (1), donde obtemos

$$10S - S = 6$$
$$9S = 6$$
$$S = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Assim, $0{,}6666\ldots = \frac{2}{3}$

b) Encontre a fração correspondente à dízima 0.090909...

Solução

S = 0,09+0,0009+0,000009+... (1)

Multiplicamos (1) por 10^2,

100S = 9+0,09+0,0009+0,000009+... (2)

Fazendo (2) menos (1), temos

$$99S = 9$$
$$S = \frac{9}{99} = \frac{1}{11}$$

Logo, temos

$$0{,}090909\ldots = \frac{1}{11}$$

Exercícios Propostos:

1. Transforme os números decimais abaixo em frações:
   a) –1,3
   b) 0,580
   c) 0,1000
   d) 7%
   e) 3,3333...

2. Coloque os números abaixo na ordem crescente:

a) $(0{,}55);\ (-1{,}2);\ (1{,}33);\ (2{,}4);\ (-0{,}125);\ (0{,}2000);\ (2{,}07).$

a) $\frac{1}{2};\ -\frac{2}{3};\ \frac{3}{5};\ \frac{15}{7};\ 4;\ \frac{450}{100},\ -7.$

b) $(0{,}4);\ (7{,}2);\ (-2{,}1);\ \frac{7}{5};\ \frac{-10}{3};\ 2.$

2.3 Adição e Subtração

Podemos somar ou subtrair frações que possuam o **mesmo denominador,** procedendo da seguinte forma: somando (ou subtraindo) o numerador da primeira fração com o numerador da segunda fração e assim, sucessivamente, (se houver mais frações). O denominador será o mesmo!

Exemplos 6:

a. $\frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{4}{5}$

b. $\frac{5}{7} - \frac{3}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$

Quando as frações possuem **denominadores diferentes,** devemos reduzí-las ao menor denominador comum (ou Mínimo Múltiplo Comum-**MMC**) e, em seguida dividir pelo denominador e o resultado multiplicar pelo numerador. Este procedimento se repete para cada fração existente. Por último, podemos somar ou subtrair as frações equivalentes às frações dadas.

Exemplo 7:

15 é o menor denominador comum ou o mínimo múltiplo comum de 3 e 5.

$$\frac{1}{3} + \frac{4}{5} = \underbrace{\frac{5}{15} + \frac{12}{15}}_{} = \frac{17}{15}$$

Frações equivalentes às frações dadas, com o mesmo denominador.

Contra Exemplo:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+cb}{bd}\neq\frac{a+c}{b+d}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{999}{1000}=0{,}5+0{,}999=1{,}499$$

$$\neq\frac{1+999}{2+1000}=\frac{1000}{1002}=0{,}998$$

Exercícios Propostos:

3. Calcule e dê a resposta na forma fracionária:

a) $\frac{1}{2}+\frac{3}{5}=$

b) $\frac{7}{3}-\frac{1}{5}=$

c) $\frac{2}{3}-\frac{1}{4}+\frac{3}{5}=$

d) $\frac{2}{5}+1=$

e) $-\frac{5}{6}+\frac{3}{4}=$

f) $-\frac{1}{12}-\frac{3}{8}=$

g) $2-0{,}7-1{,}25+0{,}4=$

h) $2-0{,}7-\frac{7}{4}=$

i) $1{,}2-\frac{3}{4}-\frac{4}{5}+\frac{1}{2}=$

2.4 Multiplicação

Basta multiplicar **numerador** por **numerador** e **denominador** por **denominador**.

Exemplos 8:

a) $\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{4}=\frac{1\times 5}{3\times 4}=\frac{5}{12}$

b) $\frac{5}{1}\cdot\frac{2}{3}=\frac{5\times 2}{1\times 3}=\frac{10}{3}$

2.5 Divisão

Mantenha a primeira fração e inverta a segunda passando a divisão para multiplicação.

Exemplos 9:

Para os exemplos **a** e **c** lembre-se:

$7=\frac{7}{1}$ $\quad 8=\frac{8}{1}$

a) $\frac{1}{5}:7$ ou $\frac{1}{5}:\frac{7}{1}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{7}=\frac{1\times 1}{5\times 7}=\frac{1}{35}$

b) $\frac{1}{5}:\frac{3}{2}=\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1\times 2}{5\times 3}=\frac{2}{15}$

c) $8:\frac{2}{3}$ *ou* $\frac{8}{1}:\frac{2}{3}=\frac{8}{1}\cdot\frac{3}{2}=$
$\frac{8\times 3}{1\times 2}=\frac{24\div 2}{2\div 2}=\frac{12}{1}=12$

Exercícios Propostos:

4. Calcule os produtos e dê a resposta na forma fracionária:

a) $-\frac{13}{8}\cdot\frac{5}{26}\cdot\frac{16}{15}=$

b) $2.\left(-\frac{13}{8}\right)\cdot(-0{,}6)\cdot\frac{1}{39}=$

c) $-0{,}8\cdot\left(-\frac{9}{20}\right)\cdot 0{,}5=$

5. Calcule as divisões:

a) $\frac{2/3}{9/4}=$

b) $\dfrac{3/4}{4} =$

c) $\dfrac{-1/2}{7} =$

d) $\dfrac{2}{-1/2} =$

3. Potenciação

Podemos simplificar a multiplicações de fatores iguais. Por exemplo, o produto $3.3.3.3$ pode ser indicado na forma 3^4. Assim, o símbolo a^n, sendo a um número inteiro e n um número natural maior que 1, significa o produto de n fatores iguais a a:

$$a^n = \underbrace{a.a.a. \;\; ... \;\; .a}_{n \text{ fatores}}$$

onde:

- a é a **base**;
- n é o **expoente**;
- o resultado é a **potência**.

Por definição, temos que: $\mathbf{a}^0 = 1$ ($\mathbf{a} \neq 0$, pois 0^0 é indeterminado) e $\mathbf{a}^1 = \mathbf{a}$.

Exemplos 10:

a) $\dfrac{(-2)^2}{(-2)^3} = \dfrac{(-2).(-2)}{(-2).(-2).(-2)} = \dfrac{4}{-8} = -\dfrac{1}{2}$

b) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{3}{4}.\dfrac{3}{4} = \dfrac{9}{16}$

c) $(-2)^3 = -8$

Cuidado com os sinais!!!

- **Número negativo elevado a expoente <u>par</u> fica <u>positivo</u>.**

Exemplos 11:

a) $(-2)^4 = (-2).(-2).(-2).(-2) = 16$

b) $(-3)^2 = (-3)\cdot(-3) = 9$

- **Número negativo elevado a expoente <u>ímpar</u> permanece <u>negativo</u>.**

Exemplo 12:

$$(-2)^3 = \underbrace{(-2) \cdot (-2)} \cdot (-2) =$$

$$= 4 \cdot (-2) = \boxed{-8}$$

Principais propriedades:

a) $\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$

Exemplos 13:

i) $2^x \cdot 2^2 = 2^{x+2}$

ii) $a^4 \cdot a^7 = a^{4+7} = a^{11}$

b) $\boxed{a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}}$

O sinal negativo no expoente indica que a base da potência deve ser invertida e simultaneamente devemos eliminar o sinal negativo do expoente.

Exemplos 14:

i) $a^{-3} = \dfrac{1}{a^3}$

ii) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{3^2}{2^2} = \dfrac{9}{4}$

iii) $(-4)^{-1} = \left(-\dfrac{1}{4}\right)^1 = -\dfrac{1}{4}$

iv) $\dfrac{2}{3x} = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{x} = \dfrac{2}{3}\cdot x^{-1}$

c) $\boxed{\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$

Exemplos 15:

i) $\frac{3^4}{3^x} = 3^{4-x}$

ii) $\frac{a^4}{a^5} = a^{4-5} = a^{-1}$

d) $\boxed{(a^m)^n = a^{m \cdot n}}$

Exemplos 16:

i) $(4^3)^2 = 4^3.4^3 = 4^{3+3} = 4^6$

ii) $(b^x)^4 = b^{x \cdot 4} = b^{4 \cdot x}$

e) $\boxed{(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n}$

Exemplos 19:

i) $(x \cdot a)^2 = x^2 \cdot a^2$

ii) $(4x)^3 = 4^3 \cdot x^3 = 64x^3$

iii) $(3\sqrt{x})^4 = 3^4 \cdot (\sqrt{x})^4 = 3^4 \cdot (x^{1/2})^4$
$= 3^4 \cdot x^{4/2} = 3^4 \cdot x^2 = 81x^2$

f) $\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad \text{com} \quad b \neq 0}$

Exemplos 18:

i) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$

ii) $\left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1^2}{5^2} = \frac{1}{25}$

Exercícios Propostos:

6. Calcule as potências:
   a) 5^0
   b) $(-8)^0$
   c) $\left(\frac{3}{2}\right)^4$
   d) $\left(-\frac{3}{2}\right)^4$
   e) $\left(-\frac{3}{2}\right)^3$
   f) $\left(-\frac{3}{5}\right)^2$

7. Qual é a forma mais simples de escrever:
   a) $(a \,.\, b)^3 \,.\, b \,.\, (b \,.\, c)^2$
   b) $\frac{x^3.y^2.y^5.x.x^4}{y^7}$

8. Calcule o valor da expressão:

$$A = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(-\frac{1}{4}\right)^{-2}$$

9. Simplificando a expressão $\frac{3.\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}{3.\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{3}{2}}$, obtemos qual número?

10. Efetue:
    a) $\frac{a^8}{a^3} =$
    b) $\left(\frac{2ab^2}{c^3}\right)^2 \cdot \left(\frac{a^2c}{b}\right)^3 =$
    c) $\frac{\left(\frac{3x^2y}{a^3b^3}\right)^2}{\left(\frac{3xy^2}{2a^2b^2}\right)^3} =$
    d) $\left(\frac{3a}{b^2}\right)^4 =$

e) $\left(\frac{2ab^3}{5x^4}\right)^{-2} =$

f) $\left(-\frac{1}{3a^2}\right)^{-4} =$

11. Qual o valor de a, se $a = \left(-2+\frac{4}{5}\right)^{-2}$?

12. Simplifique as expressões:

a) $E = \frac{3^{n+2}\cdot 3^n}{3\cdot 3^{n+1}}$

b) $E = \frac{4^n \cdot 2^{(n-1)}}{4^{(n+1)}}$

c) $G = \frac{25^{n+2}\cdot\sqrt{100}}{5^{n+1}}$

4. Radiciação

A radiciação é a operação inversa da potenciação. De modo geral podemos escrever:

$$\sqrt[n]{a} = b \Rightarrow b^n = a \ (n \in \mathbb{N} \ e \ n \geq 1)$$

a) $\sqrt{4} = 2$ *pois* $2^2 = 4$

b) $\sqrt[3]{8} = 2$ *pois* $2^3 = 8$

Na raiz $\sqrt[n]{a}$, temos:

- O número n é chamado **índice;**
- O número a é chamado **radicando.**

Principais propriedades:

a) $\boxed{\sqrt[n]{a^p} \Leftrightarrow a^{p/n}}$

Exemplos 20:

i) $\sqrt[3]{2} = 2^{1/3}$

ii) $\sqrt{4^3} = 4^{3/2}$

iii) $\sqrt[5]{6^2} = 6^{2/5}$

b) $\boxed{\sqrt[n]{a^n} = a^{n/n} = a^1 = a}$, **para n ímpar.**

Exemplo 21:

i) $\sqrt[3]{(-2)^3} = (-2)^{3/3} = (-2)^1 = -2$

$\boxed{\sqrt[n]{a^n} = |a|}$, **para n par**

Exemplo 22:

i) $\sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2$

c) $\boxed{\sqrt[n]{a\cdot b} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}}$

Exemplo 23:

i) $\sqrt[3]{a^3\cdot b^6} = \sqrt[3]{a^3}\cdot\sqrt[3]{b^6}$
$= a^{3/3}\cdot b^{6/3} = a\cdot b^2$

d) $\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$

Exemplo 24:

i) $\sqrt{\frac{a^6}{b^5}} = \frac{\sqrt{a^6}}{\sqrt{b^5}} = \frac{a^{6/2}}{b^{5/2}}$
$= \frac{a^3}{b^{5/2}}$ *ou* $\frac{a^3}{\sqrt{b^5}}$

e) $\boxed{\left(\sqrt[n]{b}\right)^m = \left(b^{1/n}\right)^m = b^{\frac{1}{n}\cdot m} = b^{\frac{1}{n}\cdot\frac{m}{1}} = b^{\frac{m}{n}}}$

Exemplo 25:

i) $\left(\sqrt{5}\right)^3 = \left(5^{1/2}\right)^3 = 5^{\frac{1}{2}\cdot 3} = 5^{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{1}} = 5^{3/2}$

f) $\boxed{\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a}}$

Exemplo 26:

i) $\sqrt[3]{\sqrt[2]{3}} = \sqrt[3\cdot2]{3} = \sqrt[6]{3}$

Exercícios Propostos:

13. Dê o valor das expressões e apresente o resultado na forma fracionária:
    a) $\sqrt{\frac{1}{100}} =$
    b) $-\sqrt{\frac{1}{16}} =$
    c) $\sqrt{\frac{4}{9}} =$
    d) $-\sqrt{0,01} =$
    e) $\sqrt{0,81} =$
    f) $\sqrt{2,25} =$

14. Calcule a raiz indicada:
    a) $\sqrt[9]{a^3}$
    b) $\sqrt[3]{48}$
    c) $\sqrt{t^7}$
    d) $\sqrt[4]{t^{12}}$

15. Escreva na forma de potência com expoente fracionário:
    a) $\sqrt{7} =$
    b) $\sqrt[4]{2^3} =$
    c) $\sqrt[5]{3^2} =$
    d) $\sqrt[6]{a^5} =$
    e) $\sqrt[3]{x^2} =$
    f) $\frac{1}{\sqrt{3}} =$

16. Escreva na forma de radical:
    a) $2^{\frac{1}{5}} =$
    b) $4^{\frac{2}{3}} =$
    c) $x^{\frac{1}{4}} =$
    d) $8^{-\frac{1}{2}} =$
    e) $a^{\frac{5}{7}} =$
    f) $(a^3b)^{\frac{1}{4}} =$
    g) $(m^2n)^{-\frac{1}{5}} =$
    h) $m^{-\frac{3}{4}} =$

17. De que forma escrevemos o número racional *0,001*, usando expoente inteiro negativo?
    a) 10^{-1}
    b) 10^{-2}
    c) 10^{-3}
    d) 10^{-4}
    e) 1^{-10}

18. Simplifique $12\sqrt{10} - 6\sqrt{10} - 8\sqrt{10}$.

19. Determine as somas algébricas:
    a) $\frac{7}{3}\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{2} - \frac{5}{4}\sqrt[3]{2} =$
    b) $\frac{\sqrt{5}}{6} + \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{5}}{3} =$

5. Regra de Três Simples

A **Regra de Três Simples** é uma forma de se descobrir um valor indeterminado através de outros três valores. Para tal, relacionam-se quatro valores divididos em dois pares (par **a**índice e **b**índice) de mesma grandeza e unidade (*e.g.*: $\mathbf{a_1}$ e $\mathbf{a_2}$), os quais estão relacionados entre si. Existem duas formas de se realizarem os cálculos pela Regra de Três Simples, dependendo da relação entre os pares de grandezas.

a) Grandezas diretamente proporcionais:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

b) Grandezas inversamente proporcionais:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_2}{b_1}$$

<u>*Exemplo 27:*</u>

Um atleta percorre 35 km em 3 horas. Mantendo o mesmo ritmo, em quanto tempo ele percorrerá 50 km? As grandezas são diretamente proporcionais (quanto maior o tempo, maior a distância que ele percorre), portanto utilizamos a relação dada em <u>**a**</u>:

$$\frac{35\,km}{50\,km} = \frac{3\,h}{x}$$

fazendo-se a multiplicação cruzada dos termos:

35x = 150

x = 4,29 horas = 4h + 0,29h

= 4h + 17min = **4h17min**

<u>Exercícios Propostos:</u>

20. Um trem, deslocando-se a uma velocidade média de 400Km/h, faz um determinado percurso em 3 horas. Em quanto tempo faria esse mesmo percurso, se a velocidade utilizada fosse de 480km/h?

21. Bianca comprou 3 camisetas e pagou R$120,00. Quanto ela pagaria se comprasse 5 camisetas do mesmo tipo e preço?

22. Uma equipe de operários, trabalhando 8 horas por dia, realizou determinada obra em 20 dias. Se o número de horas de serviço for reduzido para 5 horas, em que prazo essa equipe fará o mesmo trabalho?

Respostas Módulo 1

1. a) $-13/10$ b) $29/50$ c) $1/10$ d) $7/100$

****

2. a) $\frac{11}{10}$ b) $\frac{32}{15}$ c) $\frac{61}{60}$

d) $\frac{7}{5}$ e) $-\frac{1}{12}$

****

3. a) $-\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{20}$ c) $\frac{9}{50}$

****

4. a) $\frac{8}{27}$ b) $\frac{3}{16}$ c) $\frac{-1}{14}$ d) -4

****

5. a) $(-1{,}2);(-0{,}125);(0{,}2);(0{,}55);(1{,}33);(2{,}07);(2{,}4)$.

b) $-7; -2/3; 1/2; 3/5; 15/7; 4; 450/100$

c) $-10/3$; $(-2{,}1)$; $(0{,}4)$; $7/5$; 2; $(7{,}2)$

6. a) 1 b)1 c) $\frac{81}{16}$

d) $\frac{81}{16}$ e) $-\frac{27}{8}$ f) $\frac{9}{25}$

****

7. a) $a^3b^6c^2$ b) x^8 **8.** $\frac{65}{4}$ **9.** $-\frac{6}{7}$

****

10. a) a^5 b) $\frac{4a^8b}{c^3}$ c) $\frac{8x}{3y^4}$

d) $\frac{81a^4}{b^8}$ e) $\frac{25x^8}{4a^2b^6}$ f) $81a^8$

****

11. a = $\frac{25}{36}$ **12.** a) 3^n b) 2^{n-3} c) 2.5^{n+4}

****

13. a) $\frac{1}{10}$ b) $-\frac{1}{4}$ c) $\frac{2}{3}$

d) - $\frac{1}{10}$ e) $\frac{9}{10}$ f) $\frac{15}{10}$

****

14. $a)\sqrt[3]{a}\ b)\ 2.\sqrt[3]{6}\ c)\ t^3\sqrt{t}\ d)t^3$

****

15. $a)7^{\frac{1}{2}}\ b)\ 2^{\frac{3}{4}}\ c)\ 3^{\frac{2}{5}}\ d)\ a^{\frac{5}{6}}$

$e)\ x^{\frac{2}{3}}\ f)\ 3^{-\frac{1}{2}}$

****

16. $a)\sqrt[5]{2}\ b)\ \sqrt[3]{16}\ c)\ \sqrt[4]{x}\ d)\frac{1}{\sqrt{8}}\ e)\ \sqrt[7]{a^5}$

$f)\ \sqrt[4]{a^3b}\ g)\ \frac{1}{\sqrt[5]{m^2n}}\ h)\frac{1}{\sqrt[4]{m^3}}$

****

17. letra c **18.** $-2\sqrt{10}$

****

19. $a)-\frac{11}{12}\sqrt[3]{2}$

$b)\frac{2}{15}\sqrt{5}$

****

20. 2,5 horas (2h30min)

****

21. R$200,00 pelas 5 camisetas

****

22. 32 dias

****

Módulo 2: Equações, Inequações, Sistemas de Equações e Polinômios

Nesse capítulo serão abordados conceitos referentes ao tratamento e resolução de equações e inequações de 1º e 2º graus, equações biquadradas¸ equações fracionárias e equações irracionais. Serão estudados tambem os polinômios e os sistemas de equações do 1º. grau. Estes assuntos fazem parte da ementa do ensino fundamental e ensino médio, sendo sua compreensão de fundamental importância para estudos de matemática avançada.

1. Equações

Equação é uma sentença matemática que expressa uma relação de igualdade entre variáveis (tambem chamadas de incógnitas, ou seja, quantidades desconhecidas de uma equação ou de um problema), sendo que a condição imposta pela equação só é verdadeira para determinados valores atribuídos às incógnitas.

Mais simplificadamente, a equação consiste em uma expressão matemática envolvendo o sinal de igual e ao menos um termo desconhecido (uma incógnita), como mostrado abaixo:

$$2x + 10 = 18$$

Onde x é a única incógnita da equação (as incógnitas podem ser representadas por qualquer letra). Como já mencionado anteriormente, a equação será satisfeita somente para determinados valores da incógnita (neste caso, x). A resolução de uma equação consiste em determinar os valores das incógnitas para os quais a equação é verdadeira. Resolvendo a equação acima:

1° Passo: Diminuindo 10 nos dois lados da equação (ou somando -10 em ambos os lados da equação):

$$2x + 10 - 10 = 18 - 10$$
$$2x = 8$$

2° Passo: Dividindo ambos os lados da equação por 2 (ou multiplicando por $\frac{1}{2}$ ambos os lados):

$$\frac{2x}{2} = \frac{8}{2}$$

$$x = 4$$

Assim, o único valor de x para o qual a equação é satisfeita é 4.

1.1. Equações de 1° Grau

É toda equação na forma $ax + b = 0$, sendo a e b números reais, com $a \neq 0$. Essas equações possuem apenas uma incógnita e são denominadas de Equações de 1° grau, pois é a maior potência da incógnita ($x = x^1 \rightarrow grau = 1$).

A solução geral de uma equação do 1º. grau é dada como $x = -\dfrac{b}{a}$.

Exemplos:

i.

$$\boldsymbol{-3y + 8 = 17}$$

Resolução: Inicialmente, se subtrairmos 17 dos dois lados da equação, poderemos perceber com mais facilidade que trata-se de uma equação do 1º. grau:

$$-3y + 8 - 17 = 17 - 17$$

$$-3y+8-17=\cancel{17}-\cancel{17}$$

$$-3y-9=0$$

Agora, podemos adicionar 9 nos dois lados da equação, o que resulta:

$$-3y\cancel{-9}\cancel{+9}=0+9$$

$$-3y=9$$

Dividindo então, ambos os lados da equação por -3 (ou multiplicando ambos os lados por $\frac{1}{3}$), teremos:

$$\frac{\cancel{-3}y}{\cancel{-3}}=\frac{9}{-3}$$

$$y=-3$$

Então, o único valor de y para o qual a equação é satisfeita é -3.

ii.

$$\mathbf{3(2x-1)=2(2x+3)}$$

$$3.2x-3.1=2.2x+2.3$$

$$6x-3=4x+6$$

$$6x-4x=6+3$$

$$2x=9$$

$$x=\frac{9}{2}$$

iii.

$$\mathbf{\frac{2}{2z+1}=\frac{5}{3z-2}}$$

$$2(3z-2)=5(2z+1)$$

$$6z-4=10z+5$$

$$-4z=9$$

$$z=-\frac{9}{4}$$

<u>Possíveis soluções de uma equação do 1º grau.</u>

Uma equação do 1º pode ter ou não solução, como mostrado nos exemplos abaixo:

Exemplo com solução única:

$$2x-3=4x+7$$
$$-2x=10$$
$$x=-5$$

OBS: Durante a resolução de uma equação, caso haja a situação na qual $a=0$ então $ax+b=0$, por definição, não é uma equação de 1º grau. Abaixo aparecem alguns erros comuns na resolução:

Exemplo que não possui solução:

$$2\mathrm{x}-3=2\mathrm{x}+7$$

$$2\mathrm{x}-2\mathrm{x}=10$$

$$0\mathrm{x}=10$$

Note que não existe nenhum número que multiplicado por 0 dará 10 (ou qualquer outro número diferente de 0).

Exemplo com infinitas soluções:

$$2\mathrm{x}+3=2\mathrm{x}+3$$

$$2x - 2x = 3 - 3$$

$$0x = 0$$

Podemos perceber que qualquer número que x assuma a igualdade será verdadeira.

Vamos analisar, geometricamente, a solução de três equações:

a) $\boldsymbol{2x - 3 = 4x + 7}$

Resolvendo esta equação obtemos a solução $x = -5$ (solução única). Olhando para o gráfico:

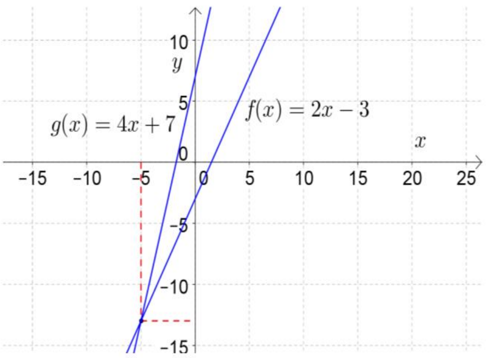


Figura 1. Retas concorrentes.

b) $\boldsymbol{2x - 3 = 2x + 7}$

Resolvendo esta equação obtemos que $0x = 10$ (não tem solução). Olhando para o gráfico:

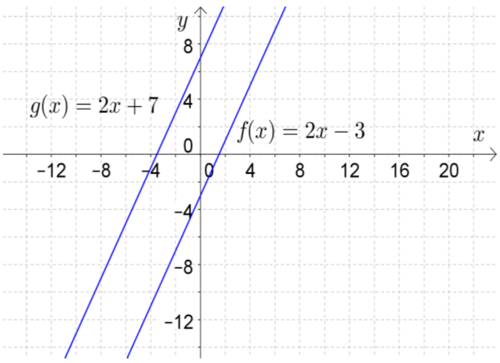


Figura 2. Retas paralelas.

c) $\boldsymbol{2x + 3 = 2x + 3}$

Resolvendo esta equação obtemos que $0x = 0$ (infinitas soluções). Olhando para o gráfico:

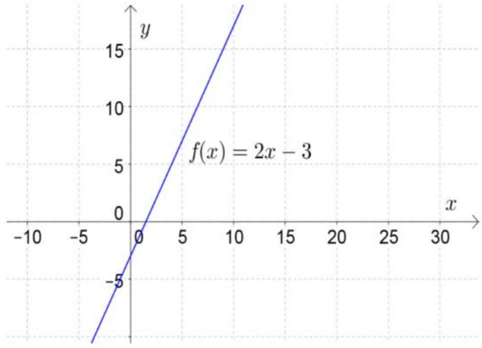


Figura 3. Retas coincidentes.

1.2. Equações de 2° Grau

É toda equação, com variável x, que pode ser colocada na forma de $\mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{c} = 0$, sendo a, b e c números reais conhecidos, com $a \neq 0$. As equações de 2° grau possuem apenas uma incógnita e são denominadas desta forma pois o maior expoente da incógnita é igual a 2 .

Exemplos:

1. $\mathbf{2x^2 - 5x + 2 = 0}$
2. $\mathbf{4x^2 - 9 = 0}$
3. $\mathbf{5x^2 - 3x = 0}$
4. $\mathbf{7x^2 = 0}$

OBS: quando b e/ou c são nulos temos uma equação incompleta, para b e c não nulos temos aquilo que chamamos de equação completa.

Equação de 2° Grau Incompleta (b e/ou c são nulos)

1° Caso: b e c são nulos:

Se $b = c = 0$, $\mathrm{ax}^2 = 0 \Rightarrow \mathrm{x} = 0$.

Exemplo:

$\mathbf{5x^2 = 0} \Rightarrow x = 0.$

2° Caso: b nulo:

Se $b = 0$, $ax^2 + c = 0$

$$\rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Exemplo:

$$\mathbf{(x-5)^2 = 2x(x-5)}$$

$$x^2 - 10x + 25 = 2x^2 - 10x$$

$$-x^2 + 25 = 0$$

$$x = \pm\sqrt{-\frac{25}{(-1)}} = \pm\sqrt{25} = \pm 5$$

$\Rightarrow x_1 = -5$ e $x_1 = 5$.

3° Caso: c nulo:

Se c= 0, $ax^2 + bx = 0$

$x(ax + b) = 0$

$\Rightarrow x = 0$ e $x = -{}^{b}/_{a}$

Exemplo:

$$\boldsymbol{(4x+3)(x-2) + (2x+1)(3x-5) = 7x^2 - 11}$$

$$4x^2 - 5x - 6 + 6x^2 - 7x - 5 = 7x^2 - 11$$

$$3x^2 - 12x = 0$$

$$x(3x - 12) = 0$$

$\Rightarrow x_1 = 0$ e $x_2 = {}^{12}/_{3} = 4$

Equação de 2° Grau

As equações de 2° grau (tanto completas quanto incompletas) podem ser resolvidas através da equação de Bháskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$ é o discriminante da equação e lembrando, novamente, $ax^2 + bx + c = 0$.

Repare que se Δ for menor que zero ($\Delta < 0$), a equação não tem raízes reais, mas sim duas raízes complexas:

$$x_1 = -\frac{b}{2a} - i\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

e

$$x_2 = -\frac{b}{2a} + i\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Onde $i = \sqrt{-1}$.

Se Δ for nulo ($\Delta = 0$), a equação de Bháskara terá uma raiz dupla, dada por:

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Para o caso em que Δ é maior que zero ($\Delta > 0$), a fórmula de Bháskara fornece duas raízes reais e diferentes, sendo elas:

$$x_1 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

e

$$x_2 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Através da figura abaixo podemos ver o comportamento de uma equação de 2° grau para os três casos analisados acima ($\Delta < 0$, $\Delta = 0$ e $\Delta = 0$).

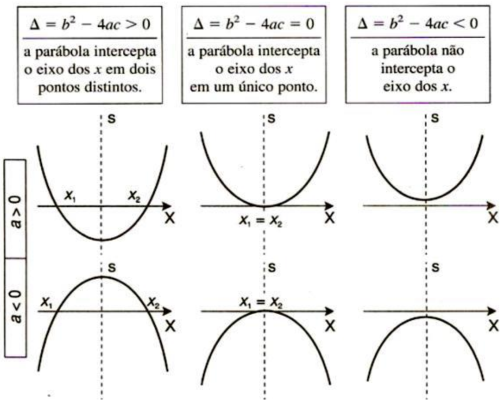


Figura 4. Gráfico de uma equação de 2° grau. O gráfico é feito para os casos em que Δ>0 (esquerda), Δ=0 (centro) e Δ<0 (direita). Além disso, pode-se ver o comportamento da curva para os casos em que a>0 (superior) Δ<0 (inferior).

Exemplo 1: Determinar as raízes da equação $30x^2 - 29x + 6 = 0$.

Primeiramente calculamos o discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-29)^2 - 4.30.6 = 121$$

As raízes são dadas por

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-29) \pm \sqrt{121}}{2.30} = \frac{29 \pm 11}{60}$$

Desta forma, tem-se

$$x_1 = \frac{29 + 11}{60} = \frac{2}{3}$$

e

$$x_2 = \frac{29 - 11}{60} = \frac{3}{10}$$

Exemplo 2: Determinar as raízes da equação $x^2 - 6x + 9 = 0$.

Primeiramente calculamos o discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4.1.9 = 0$$

Calculando as raízes obtemos

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{0}}{2.1} = \frac{6}{2} = 3$$

Observe que como Δ é nulo, existe apenas uma raiz real dupla que satisfaz a equação.

1.3. Equações Biquadradas

São as equações que podem ser escritas na forma geral $ax^4 + bx^2 + c = 0$, onde x é a variável e a, b e c são reais com $a \neq 0$.

Para encontrar as 4 raízes deste tipo de equação, faz-se a seguinte substituição de variáveis:

$$y = x^2$$

Resultando em uma equação do tipo $ay^2 + by + c = 0$ (2° grau), a qual se sabe resolver através da equação de Bháskara. Com este procedimento transformamos uma equação biquadrática em uma equação quadrática.

Após encontrar aos valores de y (duas raízes, y_1 e y_2), os valores de x (quatro raízes) são facilmente obtidos fazendo:

$$x_1 = -\sqrt{y_1} \quad ; \quad x_2 = \sqrt{y_1}$$
$$x_3 = -\sqrt{y_2} \quad ; \quad x_4 = \sqrt{y_2}$$

Exemplo: Dada a equação $(x^2 - 2)^2 + (x^2 - 2) - 6 = 0$, encontre suas raízes.

$$x^4 - 4x^2 + 4 + x^2 - 2 - 6 = 0$$

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

Fazendo $y = x^2 \Rightarrow y^2 - 3y - 4 = 0$, cujas raízes são $y_1 = -1$ e $y_2 = 4$. Assim, as os valores de x são:

$$x_1 = -\sqrt{-1} = -i \quad ; \quad x_2 = \sqrt{-1} = i$$
$$x_3 = -\sqrt{4} = -2 \quad ; \quad x_4 = \sqrt{4} = 2$$

1.4. Equações Fracionárias

Uma equação é fracionária quando algum termo possui alguma variável no denominador. Por exemplo:

1. $\frac{1}{5x} + 1 = \frac{4}{x}$; com $x \neq 0$.
2. $\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x+3} = 2$; para $x \neq -1$ e $x \neq -3$.
3. $\frac{2}{3x} + \frac{2}{x-1} + \frac{5}{3} = 0$; para $x \neq 0$ e $x \neq 1$.

OBS: As restrições nos valores da variável x nos exemplos acima são para que não ocorra divisão por zero (indeterminação).

Para resolver tais equações é necessário tirar o mínimo múltiplo comum (MMC) dos denominadores para eliminarmos a variável dos denominadores. Vejamos alguns exemplos do procedimento abaixo:

Exemplo: $\mathbf{\frac{2}{3x} + \frac{2}{x-1} + \frac{5}{3} = 0}$

Passo 1: Cálculo do MMC: Arranjando os denominadores conforme o dispositivo prático conhecido desde os tempos de colégio, teremos:

$$\begin{array}{ccccc|c} 3x & , & (x-1) & , & 3 & \end{array}$$

Iniciamos a divisão, dividindo os temos do lado esquerdo por 3, o que resulta:

$$\begin{array}{ccccc|c} 3x & , & (x-1) & , & 3 & 3 \\ x & , & (x-1) & , & 1 & \end{array}$$

Após, dividimos por x e teremos:

$$\begin{array}{ccccc|c} 3x & , & (x-1) & , & 3 & 3 \\ x & , & (x-1) & , & 1 & x \\ 1 & , & (x-1) & , & 1 & \end{array}$$

Na seqüência, dividimos novamente todos os termos, desta vez por $(x-1)$, o que resulta:

$$\begin{array}{ccccc|c} 3x & , & (x-1) & , & 3 & 3 \\ x & , & (x-1) & , & 1 & x \\ 1 & , & (x-1) & , & 1 & (x-1) \\ 1 & , & 1 & , & 1 & \end{array}$$

O minimo multiplo comum entre estes três termos então será

$$\begin{array}{ccccc|c} 3x & , & (x-1) & , & 3 & 3 \\ x & , & (x-1) & , & 1 & x \\ 1 & , & (x-1) & , & 1 & (x-1) \\ 1 & , & 1 & , & 1 & \to 3x(x-1) \end{array}$$

Passo 2: O denominador de cada termo se torna o m.m.c e o numerado de cada termo será a multiplicação do antigo numerador por m.m.c./d, onde d representa o antigo denominador do termo em questão:

$$\frac{2(x-1)}{3x(x-1)} + \frac{2.3x}{3x(x-1)} + \frac{5x(x-1)}{3x(x-1)} = \frac{0}{3x(x-1)}$$

Passo 3: Como todos os denominadores são iguais, multiplicamos ambos os lados da equação pelo MMC a fim de eliminarmos os denominadores da equação:

$$2(x-1) + 6x + 5x(x-1) = 0$$
$$2x - 2 + 6x + 5x^2 - 5x = 0$$
$$5x^2 + 3x - 2 = 0$$

Desta forma, escrevemos a equação na forma que estamos habituados e suas raízes são obtidas com o auxílio da equação de Bháskara:

$\Delta = 3^2 - 4.5.(-2) = 49,$

$$x_1 = \frac{2}{5}$$

e

$$x_2 = -1$$

1.5. Equações irracionais

São equações que apresentam incógnita com expoente fracionário, como por exemplo:

1. $x^{1/3} - 4 = 0.$
2. $(x+2)^{1/3} - 2x = 0.$
3. $(x-3)^{1/2} - 2 = 0.$

Para resolver tais equações se isola o termo com expoente fracionário dos outros e se eleva todos os termos da equação por uma potência para a qual o expoente da incógnita se torne inteiro.

Exemplos:

1. $\boldsymbol{x^{1/3} - 4 = 0}$

Passo 1: Isolando o termo com expoente fracionário,

$$x^{1/3} = 4$$

Passo 2: Elevando-se os termos à potência 3,

$$(x^{1/3})^3 = 4^3$$
$$x = 4^3 = 64$$

Prova real: Neste tipo de qeuação, devemos sempre incluir uma prova real, pois poderá ocorrer o fato de termos um resposta, mas que não é adequada ao problema irracional inicial. Assim, se susbtituirnos $x = 64$ na expressão $x^{1/3} = 4$, teremos:

$$(64)^{1/3} = 4$$

$$\sqrt[3]{64} = 4$$

$$4 = 4$$

Da conclusão acima, vemos que a resposta $x = 64$ é adequada.

2. $\boldsymbol{(x-3)^{1/2} - 2 = 0}$

Passo 1: Isolando o termo com expoente fracionário,

$$(x-3)^{1/2} = 2$$

Passo 2: Elevando-se os termos à potência 2,

$$[(x-3)^{1/2}]^2 = 2^2$$
$$x - 3 = 4 \quad \Rightarrow \quad x = 7$$

Prova real: Substituindo $x = 7$ na equação original, teremos:

$$(x-3)^{1/2} = 2$$

$$[(7)-3]^{1/2} = 2$$

$$(4)^{1/2} = 2$$

$$\sqrt[2]{4} = 2$$

$$2 = 2$$

Mais uma vez, a resposta é adequada.

3. $x + \sqrt{x+7} = 5$

Lembrando que $a^{n/m} = \sqrt[m]{a^n}$

Passo 1: Isolando o termo com expoente fracionário,

$$\sqrt{x+7} = 5 - x$$

Passo 2: Elevando-se os termos à potência 2,

$$(\sqrt{x+7})^2 = (5-x)^2$$

$$x+7 = 25-10x+x^2$$

$$x^2 - 11x + 18 = 0$$

Utilizando o método de Bhaskara, temos que as raízes são $x_1 = 2$ **e** $x_1 = 9$.

1.6. Equações Simples de Duas Variáveis

São equações da forma $ax + by + c = 0$, com a, b e c números reais, sendo a e b coeficientes não nulos.

Estas equações com duas variáveis possuem infinitas soluções e podem ser escritas na forma $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$. Por exemplo:

1. $4x - 9y - 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{4}{9}x - \frac{3}{9}$
2. $x - 5y = 0 \Rightarrow y = \frac{x}{4}$
3. $\frac{3}{2x} + y = 2 \Rightarrow y = 2 - \frac{3}{2x}$

A resolução de tais equações será vista aprofundadamente mais adiante, no capítulo referente a sistemas de equações.

2. Polinômios

Polinômios (ou expressões algébricas) são expressões matemáticas envolvendo números, letras (que representam variáveis) e com somas e produtos entre estes elementos. Você perceberá que as equações com as quais estávamos trabalhando anteriormente são exemplos de polinômios.

Monômios

O tipo mais simples de polinômio que podemos encontrar se chama monômio. Abaixo, encontramos um exemplo de monômio:

$$2x^2p$$

Neste monômio, podemos identificar o ***coeficiente numérico*** como sendo o número 2, e a ***parte literal***, como sendo x^2p. Definimos o ***grau de um monômio*** como sendo a soma dos expoentes da parte literal. Assim, o grau do monômio exemplificado acima é 3, pois esta é a soma do expoente do x (2) com o expoente do p (1).

Binômios, Trinômios e Polinômios

A soma de dois monômios é denominada binômio, como exemplificada abaixo:

$$5^3b^2 + 3a$$

Do mesmo modo, um trinômio é definido como a soma de três monômios e um polinômio, em geral, como a soma de quatro ou mais monômios. O grau de um binômio ou polinômio é definido como o grau de seu monômio de maior grau. Assim, o grau do polinômio mostrado acima é 5.

2.1. Operações com Polinômios

As operações com monômios são já conhecidas do estudante, pois foram utilizadas no processo de simplificação de expressões algébricas e no processo de resolução de equações, vistos anteriormente. Portanto, faremos apenas uma breve revisão:

Soma de monômios:

$$4x^2 + 10x^2 = (4+10)x^2 = 14x^2$$

$$5x^2 - 27x^2 = (5-27)x^2 = -22x^2$$

Observe que a soma de binômios e de polinômios, de uma maneira geral, consiste em uma extensão natural da operação de soma de monômios, ou seja, a soma de um polinômio nada mais é que a soma de monômios. Por exemplo:

$$\begin{aligned}(4x^4 + x^3 + 2) + (3x^3 + 2x^2 - 2) &= 4x^4 + (1+3)x^3 + 2x^2 + (2-2)\\ &= 4x^4 + 4x^3 + 2x^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(4ab^3 + 4a^2b) + (3ab^3 + a^2b - c) &= (4+3)ab^3 + (4+1)a^2b - c = 7ab^3 + 5a^2b - c\end{aligned}$$

A operação de subtração também consiste em uma extensão desta mesma ideia de soma.

Multiplicação de monômios:

A multiplicação de monômios se resolve facilmente multiplicando termo a termo, onde são multiplicados os termos numéricos e os termos literais. É importante lembrar a propriedade $x^n . x^m = x^{m+n}$. Exemplos:

$$(4x^2)(10x^3) = (4.10)x^2x^3 = 40x^5$$

$$\begin{aligned}(x^2 + x - 3)(x^2 - 1) &= x^2x^2 - 1x^2 + xx^2 - 1x - 3x^2 - 3(-1)\\ &= x^4 + x^3 - 4x^2 - x + 3\end{aligned}$$

Divisão de monômios e polinômios:

A divisão de monômios, tal como a multiplicação, resolve-se de maneira simples: dividem-se os coeficientes numéricos entre si, após, dividem-se as letras iguais entre si, subtraindo os expoentes, como mostrado no exemplo a seguir (É importante lembrar que: $\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$):

Dividir $10x^2$ por $2x$:

$$\frac{10x^2}{2x} = \frac{10}{2}\frac{x^2}{x} = 5x$$

Entretanto, ao contrário da soma, subtração e multiplicação, a divisão de binômios e a de polinômios de uma maneira mais geral, não é uma simples extensão deste processo, e justamente por este motivo, dá lugar, comumente, a uma série de resoluções erradas. Vamos ver alguns exemplos da divisão de binômios:

Dividir $4x^2y + 10xy$ por $2x^2$:

$$\frac{4x^2y + 10xy}{2x^2} = \frac{4x^2y}{2x^2} + \frac{10xy}{2x^2} = 2y + \frac{5y}{x}$$

Dividir $2x + 4y$ por $4x^2 - 16y^2$:

$$\frac{2\mathrm{x} + 4\mathrm{y}}{4x^2 - 16y^2} = \frac{2\mathrm{x} + 4\mathrm{y}}{(2x - 4y)(2x + 4y)} = \frac{1}{2x - 4y}$$

Observem que o denominador foi simplificado através de fatoração.

Dividir $x - 2$ por $x^2 + x - 6$:

$$\frac{\mathrm{x} - 2}{x^2 + x - 6} = \frac{\mathrm{x} - 2}{(x-2)(x+3)} = \frac{1}{x+3}$$

Observem que novamente o denominador foi simplificado através de fatoração.

Dividir $x^2 — 3x - 4$ por $2x^2 - x - 3$:

$$\frac{x^2 - 3x - 4}{2x^2 - x - 3} = \frac{(x+1)(x-4)}{(x+1)(2x-3)} = \frac{x-4}{2x-3}$$

Divisão de polinômios:

Para resolvermos as divisões de polinômios, devemos inicialmente montar a divisão a maneira de como fazíamos na escola básica.

É importante que os polinômios envolvidos na divisão (dividendo e divisor) estejam escritos em ordem decrescente de grau de seus monômios, da esquerda para a direita. Após esta montagem, dividimos o primeiro monômio do dividendo pelo primeiro monômio do divisor. Disto surgira um monômio no quociente. Devemos então multiplicar este monômio pelo divisor e subtrair o resultado desta multiplicação, do dividindo, como mostrado nos exemplos a seguir:

Dividir $\mathbf{10x^2 - 43x + 40}$ por $\mathbf{2x - 5}$:

$$\begin{array}{l|l}
10x^2 - 43x + 40 & \underline{2x - 5} \\
\underline{-10x^2 + 25x} & 5x - 9 \\
0 \quad - 18x + 40 & \\
\quad \underline{+18x - 45} & \\
\qquad 0 - \ 5 &
\end{array}$$

Assim, temos que

$$\frac{10x^2 - 43x + 40}{2x - 5} = \frac{(2x-5)(5x-9) - 5}{2x - 5}$$
$$= 5x - 9 - \frac{5}{2x - 5}$$

Da operação mostrada, fica óbvio que o processo deve ser repetido até que surja no dividendo, um monômio que "não pode mais ser dividido" pelo divisor.

Dividir $\mathbf{6x^4 - 10x^3 + 9x^2 + 9x - 5}$ por $\mathbf{2x^2 - 4x + 5}$:

$$\begin{array}{l|l}
6x^4 - 10x^3 + \ 9x^2 + 9x - 5 & \underline{2x^2 - 4x + 5} \\
\underline{-6x^4 + 12x^2 - 15x^2} & 3x^2 + x - 1 \\
\quad 0 \ + \ 2x^3 - \ 6x^2 + 9x - 5 & \\
\quad \underline{- \ 2x^3 + \ 4x^2 - 5x} & \\
\qquad 0 \ - \ 2x^2 + 4x - 5 & \\
\qquad \underline{+ \ 2x^2 - 4x + 5} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Assim, temos que

$$\frac{6x^4 - 10x^3 + 9x^2 + 9x - 5}{2x^2 - 4x + 5} = 3x^2 + x - 1$$

3. Inequações

Definimos como inequações as expressões matemáticas semelhantes às equações, mas que diferem destas por representarem não igualdades, mas desigualdades. Assim, são exemplos de inequações as expressões abaixo:

$$2x - 3 > 3x + 7$$

$$\frac{x}{2} + 5 < 2x + 3$$

$$(x+2)^2 \leq 4x + 8$$

$$3x^2 + 5x - 12 \neq 2x^2 + 6x - 6$$

Exemplos:

1. Determinar a solução da inequação $2x - 3 > 3x + 7$

Isolando a variável:

$$2x - 3x > 7 + 3$$
$$-x > 10$$

Passamos a variável x para a direita e o 10 para a esquerda:

$$-10 > x$$

Assim, encontramos que a inequação é satisfeita para todo $x < -10$. Mais formalmente, expressamos o conjunto solução como

$$S = \{x \in \mathbb{R}/x < -10\}$$

2. Determinar a solução da equação $\frac{\mathrm{x}}{2} + 5 < 2x + 3$

Isolando a variável,

$$5 - 3 < 2x - \frac{\mathrm{x}}{2}$$

$$2 < \frac{3\mathrm{x}}{2}$$

Multiplicando ambos os lados da equação por $\frac{2}{3}$,

$$\frac{2}{3}.2 < 3x.\frac{2}{3}$$

$$\frac{4}{3} < x$$

Desta forma encontramos

$$S = \{x \in \mathbb{R} \backslash x > \frac{4}{3}\}$$

3. Determinar a solução da equação $(\mathrm{x}+2)^2 \leq 4\mathrm{x}+8$

$$(\mathrm{x}+2)^2 \leq 4\mathrm{x}+8$$

$$\mathrm{x}^2 + 4\mathrm{x} + 4 \leq 4\mathrm{x} + 8$$

Passando todos os termos para o lado esquerdo, obtemos a expressão

$$\mathrm{x}^2 - 4 \leq 0$$

Neste caso temos uma inequação do 2° grau. Podemos determinar as raízes da equação que corresponde a ela ($x^2 - 4 = 0$), que são $x_1 = -2$ e $x_2 = 2$.

Agora olhamos para o gráfico desta equação do segundo grau, mostrado abaixo. Observem que no intervalo de x=-2 a x=2, a função retorna valores negativos e para os intervalos de x=-∞ a x=-2 e de x=2 a x=∞ a função retorna valores positivos. Desta forma, concluímos que a solução para a inequação $x^2 - 4 \leq 0$ é

$$S = \{x \in \mathbb{R} \backslash -2 \leq x \leq 2\}$$

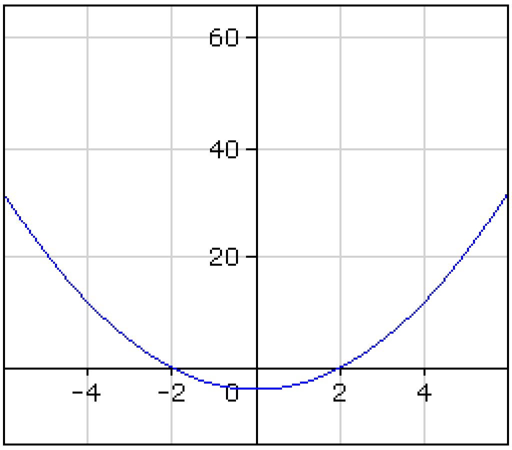


Figura 5. Gráfico da função $x^2 - 4 = 0$.

4. Determinar a solução da equação $3\mathrm{x}^2 + 5\mathrm{x} - 12 \neq 2\mathrm{x}^2 + 6\mathrm{x} - 6$:

Passando todos os termos para o lado esquerdo da equação obtemos a expressão

$$\mathrm{x}^2 - \mathrm{x} - 6 \neq 0$$

Ou seja, procuramos todos os valores possíveis de x de forma que $x^2 - x - 18$ seja diferente de zero. As raízes da equação

$x^2 - x - 18 = 0$ são $x_1 = -2$ e $x_2 = 3$. Ou seja, os únicos valores que equação se anula são x_1 e x_2, e, portanto, todos os outros valores de x é a solução para o problema, ou seja,

$$S = \{x \in \mathbb{R} \backslash x \neq -2 \ e \ x \neq 3\}$$

4. Sistemas de Equações Lineares

Não podemos determinar uma única solução em uma equação que possua mais de uma variável simultaneamente, como por exemplo:

$$4x - y = 0$$

Neste caso, o valor a variável x dependerá do valor da variável y, e vice-versa. Quando isto acontece, para podermos encontrar os valores de todas as variáveis do problema, precisamos de um número de equações (linearmente independentes) igual ao número de incógnitas. Como no exemplo acima temos duas incógnitas, para encontrar o valor de x e de y precisaríamos de mais uma equação, por exemplo, $2x + 3y = 5$, desta forma teríamos que solver o sistema

$$\begin{cases} 4x - y = 0 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$$

Quando tivermos um conjunto de duas ou mais equações do 1º grau, como mostrado acima, chamamos de *sistema de equações do 1º grau*. Desta forma, a solução de x e y é tal que obedeçam as duas equações do sistema.

Na sequência desenvolveremos alguns métodos para a solução deste sistema de equações simples que apresentamos. Tais técnicas podem ser utilizadas para sistemas com um maior número de equações, como também poderá ser visto em alguns exemplos a seguir.

Método da soma

Este é o método mais utilizado e também um dos mais simples e diretos que pode ser de grande utilidade na maioria dos problemas de sistemas de equações do 1º grau.

O método consiste em somarmos os coeficientes numéricos das variáveis semelhantes entre si, para formar uma nova equação onde uma das variáveis terá sido eliminada no processo e restará uma equação com apenas uma variável. Para tanto, podemos multiplicar todos os termos de uma equação por um mesmo numero, ou até mesmo, multiplicar várias equações do sistema, cada uma por números diferentes como mostrado nos exemplos a seguir.

Exemplo: Resolver o sistema abaixo pelo método da soma.

$$\begin{cases} \mathbf{2x + y = 6} \\ \mathbf{2x + 3y = 2} \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por -1:

$$\begin{cases} -2x - y = -6 \\ \ \ 2x + 3y = 2 \end{cases}$$

Percebe-se que se somarmos as duas equações, a variável x será eliminada, fazendo isto obtemos:

$$2y = -4$$
$$y = -2$$

Agora que encontramos o valor de y, usamos este valor em uma das equações (pode ser qualquer uma das duas) para encontrar o valor de x. Aqui vamos utilizar a segunda equação:

$$2x + 3(-2) = 2$$
$$2x - 6 = 2$$
$$2x - 6 = 2$$
$$x = 4$$

Desta forma encontramos como solução

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases}$$

Reparem que esta solução satisfaz ambas as equações ($2x + y = 6$ e $2x + 3y = 2$).

Método da substituição

Este método consiste em escrever uma variável em função das outras, em uma das equações e depois substituir esta variável na outra equação, como mostrado no exemplo abaixo.

Exemplo: Resolver o sistema pelo método da substituição:

$$\begin{cases} \boldsymbol{2x + y = 6} \\ \boldsymbol{2x + 3y = 2} \end{cases}$$

Isolando a variável y na primeira equação obtemos que

$$y = 6 - 2x$$

Agora usamos esta relação encontrada na segunda equação:

$$2x + 3(6 - 2x) = 2$$
$$2x + 18 - 6x = 2$$
$$-4x = -16$$
$$x = 4$$

Agora que encontramos o valor de x, usamos este valor em uma das equações (pode ser qualquer uma das duas) para encontrar o valor de x. Aqui vamos utilizar a equação que nos montamos para escrever y em função de x:

$$y = 6 - 2x$$
$$y = 6 - 2.4$$
$$y = -2$$

Desta forma encontramos como solução

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases}$$

Reparem que esta solução é a mesma encontrada pelo método da soma.

EXERCÍCIO PROPOSTOS

Seção 1.1: Equações de 1° Grau

1. Determine as raízes das seguintes equações do 1° grau.

a. $4x = 8$
b. $-5x = 10$
c. $7 + x = 8$
d. $3 - 2x = -7$
e. $16 + 4x - 4 = x + 12$
f. $8 + 7\text{x} - 13 = \text{x} - 27 - 5\text{x}$
g. $\frac{2x}{3} = \frac{3}{4}$
h. $\frac{1}{4} = \frac{3x}{10}$
i. $9x + 2 - (4x + 5) = 4x + 3$
j. $3(2 - x) - 5(7 - 2x) = 10 - 4x + 5$
k. $\frac{x-2}{3} - \frac{12-x}{2} = \frac{5x-36}{4} - 1$
l. $2x - \frac{x+\frac{1}{2}}{2} = 2x - 3\left(x - \frac{x+3}{2}\right)$
m. $2\left(x - \frac{1}{3}\right) - 3\left(x - \frac{x-\frac{1}{4}}{3}\right) + \frac{2(x-3)}{6} = 3x$
n. $\frac{2x-4}{5} - 1 = \frac{20-x}{4} - \frac{x+\frac{1}{4}}{3} + \frac{2(x-3)}{6}$
o. $2x + 1 - \frac{3x}{4} = \frac{x+1}{2} - \frac{1-3x}{4}$
p. $\frac{x}{4} - 1 - \frac{x}{12} = x - \frac{5x-4}{6}$
q. $1 + \frac{2x-5}{4} - \frac{3-x}{2} = 1 + x - \frac{11}{4}$
r. $\frac{9x+7}{2} - x + \frac{x+2}{7} = 36$

Seção 1.2: Equações de 2° Grau

1. Determine as raízes das seguintes equações de 2° grau.

a. $4x^2 = 8$
b. $x^2 - 7x + 6 = 0$
c. $x^2 + 3x - 28 = 0$
d. $3x^2 - 5x + 2 = 0$
e. $16x^2 + 16x + 3 = 0$
f. $4x^2 - 16 = 0$
g. $2x^2 - 18 = 0$
h. $3x^2 = 5x$
i. $2x^2 + 8x = 0$
j. $(2x - 3)^2 = (4x - 3)^3$

2. Assinale qual alternativa dá valores de k (real) para que a equação $(k^2 - 4)x^2 + 2x = 0$ seja uma equação de 2° grau?
a. $k = \pm 2$
b. $k \neq \pm 2$
c. $k = 2$
d. $k = -2$
e. $k \neq 2$

3. Resolva as seguintes equações:
a. $5x^2 - 75x = 0$
b. $\frac{5x+3}{3} - \frac{x^2-14}{7} = 3$
c. $3x(x + 2) = 2x(x + 3)$

4. As raízes da equação $2x^2 + 6x - 15 = 3(x - 5)$ são
a. 0
b. $-\frac{3}{2}$
c. $\frac{3}{2}$
d. $0\ e\ \frac{3}{2}$
e. $0\ e\ \frac{-3}{2}$

5. Calcule o valor de k na equação $kx^2 - 3x = 0$ de modo que a unidade seja sua raiz.
a. 1
b. 2
c. 3
d. -3
a. -1

6. A equação $ax^2 + c = 0$ terá raízes reais se:
a. $c > 0\ e\ a > 0$
b. $c < 0\ e\ a < 0$
c. $c > 0\ e\ a \leq 0$
d. $c > 0\ e\ a < 0$
e. $c = 0\ e\ a = 0$

7. Quais são as raízes da equação $\frac{(x-4)(x+4)}{2} = 8$?
a. $\pm \frac{4\sqrt{2}}{3}$
b. $\pm 4\sqrt{2}$
c. $\pm 2\sqrt{2}$
d. $\pm \sqrt{2}$
e. ± 4

8. Resolva as seguintes equações:
a. $8x^2 - 10x = 3x^2 + 5x$
b. $(4x + 3)(x - 2) +$
$(2x + 1)(3x - 5) = 7x^2 - 11$
c. $\frac{x-2}{2} + \frac{2x-3}{4} = x^2 + x - \frac{17}{2}$
d. $(x - 5)^2 = 2x(x - 5)$

9. Qual o valor de k para que a equação $x^2 + (k - 1)x - (k + 3) = 0$ tenha suas raízes simétricas:
a. ± 1
b. ± 2
c. ± 3
d. ± 4
e. ± 5

10. Resolva as seguintes equações:
a. $9x^2 + 16 = 0$
b. $\frac{x^2+1}{3} + \frac{3x^2-1}{6} = \frac{7}{2}$
c. $(2x - 1)(x - 4) =$
$(7 + x)(-x - 2)$

11. A menor raiz da equação $3x^2 + 4x + 1 = 0$ é
a. 1
b. $\frac{1}{3}$

c. $-\frac{1}{3}$
d. -1
e. -3

12. Determinar k na equação $(2k-1)x^2+2(1-k)x+3k=0$ de modo que uma das raízes seja -1:
a. $\frac{7}{3}$
b. $\frac{3}{7}$
c. $-\frac{7}{3}$
d. $-\frac{3}{7}$
e. 1

13. Resolva a equação $x^2+\sqrt{2}x-4=0$.
a. $2\ e\ -\sqrt{2}$
b. $\sqrt{2}\ e\ -2\sqrt{2}$
c. $2\sqrt{2}\ e\ \sqrt{2}$
d. $4\sqrt{2}\ e\ -\frac{\sqrt{2}}{2}$

14. Para que a equação $-10x^2-5x+c=0$ tenha o discriminante nulo, c deve ser igual a:
a. $\frac{5}{8}$
b. $-\frac{8}{5}$
c. $\frac{8}{5}$
d. $-\frac{5}{8}$

15. Encontre as raízes das seguintes equações fracionárias:
a. $x+\frac{1}{x-5}=7$
b. $\frac{x-1}{x}=\frac{x}{4}$
c. $\frac{x}{x+1}-\frac{2}{x-1}=\frac{x-5}{x^2-1}$
d. $x-\frac{x}{2}=5-\frac{x+4}{3}$
e. $\frac{x-1}{3}=\frac{3x+1}{2}$
f. $\frac{x+10}{2}=\frac{4x-2}{x-2}$

Seção 1.3: Fracionárias

1. Determine as raízes das seguintes equações irracionais:
a. $\sqrt{x}-4=0$
b. $\sqrt{x}+2=0$
c. $\sqrt{x-1}+2=0$
d. $x-2\sqrt{x}=15$
e. $\sqrt{2x+7}=4-\sqrt{2-x}$
f. $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-4}=\sqrt{2x+9}$
g. $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}=1$
h. $\sqrt{9-x^2}=3$

Seção 1.4: Equações Biquadradas

1. A equação $x^2-3x+2=0$ admite:
a. Uma solução real.
b. Duas soluções irracionais.
c. Duas soluções racionais.
d. Seis soluções reais.
e. Uma solução racional e uma irracional.

2. Dada a equação $x^8-13x^4+36=0$ se tem que:
a. Admite quatro raízes irracionais.
b. Admite oito raízes reais.
c. Não admite raízes reais.
d. Admite quatro raízes inteiras.
e. N.D.A.

3. A soma das raízes da equação biquadrada $x^4-px^2+1=0$ vale:
a. Zero, para qualquer valor de p.
b. Depende do valor de p.
c. Para p=1, ela é 2.
d. Para p=-1, ela é 3.
e. Sempre p.

4. Forme a equação de raízes $\pm\sqrt{2a}$ e $\pm\frac{1}{2a}$
a. $2ax^4-(8a^2+1)x^2+1=0$
b. $4ax^4-(8a^2-1)x^2+a=0$
c. $4ax^4+(8a^2+1)x^2+2a=0$
d. $4ax^4-(8a^2+1)x^2+2a=0$

5. Determine as soluções das seguintes equações:

a. $\frac{(1-x)^2}{1+x^3}+\frac{(1-x)^2}{1-x^3}=\frac{4}{x^6-1}$

b. $a^2b^2x^4-(a^2+b^2)x^2+1=0$

$x^4-(a+1)ax^2+a^3=0$

Seção 2: Polinômios

1. Dê o coeficiente, a parte literal e o grau dos seguintes monômios:

a. $-x^3y^9$

b. 18

c. $-x$

d. $-7y^4$

e. $2a^6b^2$

f. $-\frac{2}{3}x^7$

2. Efetue as seguintes operações com polinômios:

a. $(-2x^5).(-2a).(-3x).(-a)$

b. $\frac{-40a^5d^2}{8d^{4a}}$

c. $(4a^2-3ab+5)+(-7ab)$

d. $(3ab^2-4a^2b)+(2ab^2-5a^2b+1)$

e. $7x^2y^3+x^3y-2)+(-x^2y^3-5x^3y+3x^{2y^2}+9)$

f. $(5a^2b^3-2a^3b+3a)-(-4a^3b)$

g. $(4x^2y)-(5x^2y^2-x^2y+2)$

h. $(2mp^2-3m^2p-4)-(5mp^2-2m^2p-7)$

i. $(7ax^2-4ax-a+2).(3a^2x)$

j. $(-3x^2y+2xy^2+x^3-5y^3).(-xy^{-1})$

k. $(3x-4).(6x-5)$

l. $(3a^2b+2ab^2-7a^2b^2).(2ab-3)$

m. $(m^4-m^3+m^2-m+1).(m-1)$

Seção 3: Inequações

1. Resolva as seguintes inequações:

a. $3-x<5+3x$

b. $2x-5<\frac{1}{3}+\frac{3x}{4}+\frac{1-x}{3}$

c. $2x>-3-3x\geq -7$

d. $\frac{5}{x}<\frac{3}{4}$

e. $x^2\leq 9$

f. $x^2-3x+2>0$

g. $1-x-2x^2\geq 0$

h. $\frac{x+1}{2-x}<\frac{x}{3+x}$

i. $\frac{\frac{1}{2}x-3}{4+x}>1$

j. $\frac{3}{x-5}\leq 2$

k. $\frac{1}{x+1}\geq\frac{3}{x-2}$

Seção 4: Inequações

1. Resolva os seguintes sistemas de equações de 1° grau:

a. $\begin{cases}x+y=3\\x-y=9\end{cases}$

b. $\begin{cases}2x-2y=12\\x+2y=11\end{cases}$

c. $\begin{cases}x+y=7\\x+2y=11\end{cases}$

d. $\begin{cases}-3x-2y=8\\x-5y=3\end{cases}$

e. $\begin{cases}x+y=12\\x-y=8\end{cases}$

f. $\begin{cases}3x-2y=-1\\2x+5y=12\end{cases}$

g. $\begin{cases}\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=-\frac{1}{3}\\x-\frac{y}{8}=\frac{5}{2}\end{cases}$

h. $\begin{cases}2x-\frac{4y}{5}=2-\frac{x}{3}\\y-5x=-\frac{3y}{5}-6\end{cases}$

2. Resolva as seguintes situações:

a. Na geladeira de Ana há 15 litros de refrigerante, dispostos tanto em garrafas de um litro e meio, quanto de 600 ml. Qual é a quantidade de garrafas de cada capacidade, sabendo-se que são 13 garrafas no total?

b. Pedrinho comprou duas coxinhas e um refrigerante pelos quais pagou R$7,00. Seu irmão Joãozinho comprou uma coxinha e um refrigerante a mais, pagando R$11,50. Qual é o preço do refrigerante e da coxinha?
c. Em uma geladeira há 42 produtos em embalagens de 400 g e de 500 g , num total de 18,5kg. Quantas embalagens de 400 g precisam ser retiradas para que o número de embalagens de 400 g seja o mesmo que o número de embalagens de 500 g?
d. Certo jogo possui fichas com duas ou quatro figuras cada uma. Um jogador possui fichas com um total de 22 figuras. Quantas fichas de cada tipo possui este jogador?
e. Em um pasto há bois e cavalos, num total de 50 animais. Somando-se o numero de patas de bois ao numero de patas de cavalos, obtemos um total de 180 patas. Quantos cavalos temos no pasto, sabendo-se que todos os animais são normais?
f. Têm-se vários quadrados iguais e também vários triângulos iguais. Se destes tomarmos dois triângulos e quatro quadrados, a soma das suas áreas será igual a 784 cm², já se tomarmos apenas um triângulo e dois quadrados, a soma das suas áreas será igual a 392 cm². Qual é a área de cada um destes triângulos e quadrados?
g. A soma de dois números é 530 e a diferença entre eles é 178. Quais são estes números?

Respostas do Módulo 2

Seção 1.1. Exercício 1:

a) $x = 2$
b) $x = -2$
c) $x = 1$
d) $x = 5$
e) $x = 0$
f) $x = -2$
g) $x = \frac{9}{8}$
h) $x = \frac{5}{6}$
i) $x = 6$
j) $x = 4$
k) $S = \{\ \}$
l) $x = \frac{19}{4}$
m) $x = \frac{23}{32}$
n) $\frac{343}{9}$
o) $S = \{\ \}$
p) $S = \{\ \}$
q) $S = \{\ \}$
r) $x = \frac{451}{51}$

Seção 1.2 Exercício 1:

a) $x = \pm\sqrt{2}$
b) $x = \{1; 6\}$
c) $x = \{-4; 7\}$
d) $x = \left\{\frac{2}{3}; 1\right\}$
e) $x = \left\{-\frac{1}{2} + \frac{i}{4}; -1 - \frac{i}{4}\right\}$
f) $x = \pm 2$
g) $x = \pm 3$
h) $x = \left\{0; \frac{5}{3}\right\}$
i) $x = \{0; -4\}$
j) $x = 0$, trata-se de uma equação de 1° grau

Seção 1.2. Exercício 2 – Letra b

Seção 1.2. Exercício 3:

a) $x = \{0; 15\}$
b) $x = \left\{0; \frac{35}{3}\right\}$
c) $x_1 = x_2 = 0$

Seção 1.2. Exercício 4 – Letra e
Seção 1.2. Exercício 5 – Letra c
Seção 1.2. Exercício 6 – Letra d
Seção 1.2. Exercício 7 – Letra b

Seção 1.2. Exercício 8:

a) $x = \{0; 3\}$
b) $x = \{0; 4\}$
c) $x = \pm\frac{5i}{2}$
d) $x = \pm 5$

Seção 1.2. Exercício 9 – Letra e

Seção 2.3. Exercício 10:

a) $x = \pm\frac{4i}{3}$
b) $x = \pm 2$
c) $x = \pm i\sqrt{6}$

Seção 1.2. Exercício 11 – Letra d
Seção 1.2. Exercício 12 – Letra b
Seção 1.2. Exercício 13 – Letra b
Seção 1.2. Exercício 14 – Letra d

Seção 1.2. Exercício 15:

a) $x_1 = x_2 = 6$
b) $x_1 = x_2 = 2$
c) $x = \{1; 3\}$
d) $x = \frac{22}{5}$
e) $x = -\frac{5}{7}$
f) $x = \pm 4$

Seção 1.3. Exercício 1 – Letra c
Seção 1.3. Exercício 2 – Letra a
Seção 1.3. Exercício 3 – Letra a

Seção 1.3. Exercício 4 – Letra e

Seção 1.3. Exercício 5:

a) $V = \left\{\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\right\}$
b) $V = \left\{\pm\frac{1}{a}; \pm\frac{a}{b}\right\}$
c) $V = \{\pm a; \pm\sqrt{a}\}$

Seção 1.4. Exercício 1:

a) $x = 16$
b) $x = 4$
c) $x = 3$
d) $x = \{9; 25\}$
e) $x = \left\{\frac{1}{7}\left(1 + 5\sqrt{2}\right); \frac{1}{7}\left(1 - 5\sqrt{2}\right)\right\}$
f) $x = \{-5; 8\}$
g) $x = \frac{17}{4}$
h) $x = 0$

Seção 2. Exercício 1:

a) Coef$\rightarrow -1$; $p.l.\rightarrow\ x^3y^9$
b) Coef$\rightarrow 18$; $p.l.\rightarrow\ x^0$
c) Coef$\rightarrow -8$; $p.l.\rightarrow\ x$
d) Coef$\rightarrow -7$; $p.l.\rightarrow\ y^4$
e) Coef$\rightarrow 2$; $p.l.\rightarrow\ a^6b^2$
f) Coef$\rightarrow -\frac{2}{3}$; $p.l.\rightarrow\ x^7$

Seção 2. Exercício 2:

a) $121a^2x^6$
b) $-5a^4d^{-2}$
c) $4a^2 - 10ab + 5$
d) $5ab^2 - 9a^2b + 5$
e) $6x^2y^3 - 4x^3y + 3x^2y + 7$
f) $5a^2b^3 + 2a^3b + 3a$
g) $-3x^2y - 5x^2y^2 - 2$
h) $7mp^2 - m^2p + 3$
i) $21a^3x^3 - 12a^3x^2 - 3a^3x + 6a^2x$
j) $3x^3 - 2x^2y - x^4y^{-1} + 5xy^2$
k) $18x^2 - 39x + 20$
l) $6a^3b^2 + 4a^2b^3 - 14a^3b^3 - 9a^2b - 6ab^2 + 21a^2b^2$
m) $m^5 - 2m^4 + 2m^3 - 2m^2 + 2m - 1$

Seção 3. Exercício 1:

a) $x > -\frac{1}{2}$
b) $x < \frac{68}{19}$
c) $-\frac{5}{3} < x \leq \frac{4}{3}$
d) $x \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{20}{3}; \infty\right)$
e) $-3 \leq x \leq 3$
f) $x \in (-\infty; 1) \cup (2; \infty)$
g) $-1 \leq x \leq \frac{1}{2}$
h) $x \in (-\infty; -3) \cup (2; \infty)$
i) $x \in (-14; -4)$
j) $x \in (-\infty; 5) \cup \left(\frac{13}{2}; \infty\right)$
k) $x \in \left(-\infty; -\frac{5}{2}\right) \cup (-1; 2)$

Seção 4. Exercício 1:

a) $x = 6; \quad y = 3$
b) $x = \frac{23}{3} \quad y = \frac{5}{3}$
c) $x = 4 \quad y = -3$
d) $x = -2 \quad y = -1$
e) $x = 5 \quad y = 7$
f) $x = 1 \quad y = 2$
g) $x = 2 \quad y = -4$
h) $x = 6 \quad y = 15$

Seção 4. Exercício 2:

a) Na geladeira de Ana há 8 garrafas de e 1500 ml e 5 garrafas de 600 ml.
b) O valor unitário do refrigerante é R$2,00 e o da coxinha é R$2,50.
c) 8 embalagens de 400 g precisam ser retiradas para que o número destas embalagens seja o mesmo que o número das embalagens de 500 g.
d) Este jogador possui 5 fichas com duas figuras e 3 fichas com quatro figuras.
e) Não é possível calcular o número de cavalos, pois estamos diante de um sistema impossível.
f) Os dados fornecidos nos levam a um sistema indeterminado que possui uma infinidade de soluções.
g) Os números são 354 e 176.

Módulo 3: Funções

Antes de dar uma definição formal de *função* mostram-se necessárias outras duas definições, a saber, a de *produto cartesiano* e a de *relação* entre dois conjuntos.

De acordo com [1], temos a definição de *produto cartesiano*:

<u>Produto Cartesiano</u>: *Sejam A e B conjuntos diferentes do vazio. Chama-se* ***produto cartesiano*** *de A por B, e indica-se por* $A\otimes B$, *o conjunto cujos elementos são todos os pares ordenados* (x,y), *tais que* $x\in A$ *e* $y\in B$, *ou seja:*

$$A\otimes B=\{(x,y)\,|\,x\in A\,e\,y\in B\}$$

Também na mesma referência, encontramos uma boa definição de *relação entre dois conjuntos*:

<u>Relação entre dois conjuntos</u>: *Dados dois conjuntos A e B, chama-se* ***relação R*** *de A em B todo subconjunto do produto cartesiano* $A\otimes B$.

Finalmente estamos aptos a definir de maneira precisa o que é uma função, segundo as palavras encontradas na referência [1]:

<u>Função:</u> *Sejam A e B conjuntos diferentes do vazio. Uma relação f de A em B é função se, e somente se,* ***todo*** *elemento de A estiver associado, através de f, a um* ***único*** *elemento de B.*

Vamos explorar um pouco estas definições através de exemplos.

<u>Exemplo 1- produto cartesiano:</u>

Sejam os conjuntos *A={1,2,3}* e *B={4,5,6}*, então o produto cartesiano $A\otimes B$ é dado por:

$$A\otimes B=\{(1,4),(1,5),(1,6),(2,4),(2,5),(2,6),(3,4),(3,5),(3,6)\}$$

<u>Exemplo 2 – relação entre dois conjuntos:</u>

Sejam os mesmos conjuntos *A* e *B* do exemplo 1. Seja a relação *R* dada por:

$$R=\{(x,y)\in A\otimes B\,|\,y=2x\}.$$

Neste caso, o subconjunto dado pela relação *R* é formado pelos elementos:

$$R=\{(2,4),(3,6)\}$$

Aqui cabem mais quatro definições:

a) ***<u>Domínio [1]:</u>*** *o conjunto formado pelos primeiros elementos dos pares ordenados de uma relação R entre dois conjuntos. Representamos este conjunto por* $Dom(R)$

   No exemplo 2 temos $Dom(R)=\{2,3\}$.

b) ***<u>Imagem [1]:</u>*** *o conjunto formado pelos segundos elementos dos pares ordenados de uma relação R entre dois conjuntos. Representamos este conjunto por* $\mathrm{Im}(R)$.

   No exemplo 2 temos $\mathrm{Im}(R)=\{4,6\}$.

c) ***<u>Conjunto de partida:</u>*** *o conjunto que contém ou é igual ao Domínio de uma relação R entre dois conjuntos.*

   No exemplo 2 temos *A* sendo o conjunto de partida da relação *R*.

d) ***<u>Conjunto de chegada (contradomínio):</u>*** *o conjunto que contém ou é igual a imagem de uma relação R entre dois conjuntos.*

   No exemplo 2 temos *B* sendo o conjunto de chegada, ou contradomínio, da relação R.

Note que *R* do exemplo 2 não é uma função de *A* em *B* pois o elemento *1* do conjunto de partida *A* não possui imagem no conjunto de chegada *B*.

<u>Exemplo 3 – função:</u>

Sejam os conjuntos *A={1,2,3,4}* e *B={1,4,9,16,25}* e a relação *R* dada por:

$$R=\{(x,y)\in A\otimes B\,|\,y=x^2\}$$

Neste caso a relação *R* de fato é uma função, pois **todo** elemento de *A* possui uma **única** imagem em *B*.

O conjunto *R* é dado por:

$$R=\{(1,1),(2,4),(3,9),(4,16)\}$$

Note que ele é apenas um subconjunto de $A \otimes B$, como especifica a definição de relação. Ainda, devemos perceber que o domínio coincide com o conjunto de partida e que a imagem está contida no contradomínio, sendo, portanto, menor que este em quantidade de elementos.

<u>*Exemplo 4:*</u>

Sejam os conjuntos: $A=\{1,4,9\}$ e $B=\{-3, -2,-1,1,2,3\}$. Seja também a relação *R* dada por:

$$R = \{(x, y) \in A \otimes B \mid y = \pm\sqrt{x}\}$$

Neste caso *R* não é uma função de *A* em *B*, porque cada elemento de *A*, o conjunto de partida, está associado por meio de *R* a **dois** elementos de *B*.

Em geral trabalha-se com funções cujo domínio e contradomínio são compostos pelo inteiro corpo dos números reais. A imagem acaba sendo um conjunto menor ou igual ao contradomínio.

<u>*Exemplo 5:*</u>

Seja $A=B=\mathbb{R}$ (o conjunto dos números reais). Seja a relação *R* dada por:

$$R = \{(x, y) \in A \otimes B \mid y = x^2\}$$

Vemos que a relação dada de fato é uma função, pois todo elemento de *A* possui uma única imagem em *B*. Notamos também que, embora o domínio e o conjunto de partida coincidam (e sempre devem coincidir para que a relação *R* seja uma função) a imagem está contida no contradomínio. Isto acontece freqüentemente.

Vejamos o comportamento do domínio de algumas funções que nos ajudarão a interpretar também as equações da Física.

1. Qual o domínio da função dada por $y = x^2 - 10x + 4$?

O domínio é o conjunto de todos os números x reais para os quais é possível realizar as operações indicadas. No caso, potência (x^2), produto (10x), soma e subtração podem ser realizadas para quaisquer números reais.

Assim, o domínio da função dada por $y = x^2 - 10x + 4$ é o conjunto dos números reais D=$\mathbb{R}$.

2. Qual o domínio a função dada por $y = \dfrac{10}{2x-8}$?

O domínio é o conjunto de todos os números x reais para os quais é possível realizar as operações indicadas. No caso, a única restrição é a divisão, que não está definida quando o divisor é zero.

Devemos ter então: $2x - 8 \neq 0$ ou $x \neq 4$.

Assim, o domínio da função, dada por $y = \dfrac{10}{2x-8}$, é o conjunto dos números reais menos o número 4 ou podemos ainda escrever D = $\mathbb{R}$ - $\{4\}$.

3. Qual o domínio a função dada por $y = \dfrac{1}{\sqrt{x-5}}$?

Neste caso, devemos ter:

- ✓ $x - 5 \geq 0$, para que exista $\sqrt{x-5}$, ou seja, devemos ter $x \geq 5$.
- ✓ $x - 5 \neq 0$, para que exista $\dfrac{1}{\sqrt{x-5}}$.

Então, devemos ter $x - 5 \neq 0 \Rightarrow x \neq 5$.

Das duas condições acima vemos que a solução é válida para $x > 5$.

Logo, o domínio da função dada por $y = \dfrac{1}{\sqrt{x-5}}$ é o conjunto $D = \{x \in R | x > 5\}$.

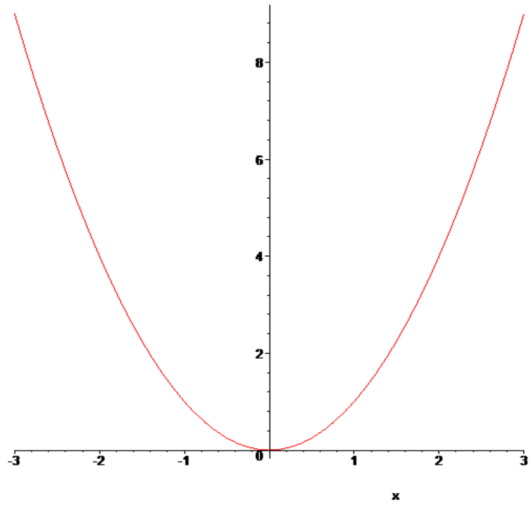
1. Gráficos

Se desenharmos duas retas perpendiculares entre si e dermos a elas uma escala apropriada construímos um **sistema de coordenadas cartesiano ortogonal**. Por comodidade orienta-se uma das retas horizontalmente no papel e a outra, como conseqüência da ortogonalidade à primeira, estará orientada verticalmente. Chamaremos o eixo horizontal de **abscissa** e o vertical de **ordenada**.

Se representarmos cada par ordenado *(x,y)* de uma relação entre dois conjuntos no plano cartesiano estaremos construindo o **gráfico** da relação em questão.

Exemplo 6:

Sejam os conjuntos *A* e *B* e a relação $R=\{(x,y) \in A \times B \mid y = x^2\}$. A representação gráfica de *R* é dada pela figura abaixo, onde restringimos o domínio ao intervalo [-3,3] e o contradomínio ao intervalo [0,9]:



2. Função Constante

É toda função do tipo $f(x) = k$ que associa a qualquer número real um mesmo número real.

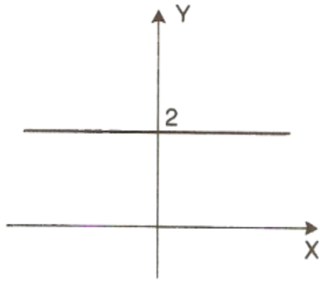
A apresentação gráfica será sempre uma reta paralela ao eixo do x, passando por $y = k$.

O domínio da função $f(x) = k$ é $D(f) = \mathbb{R}$.

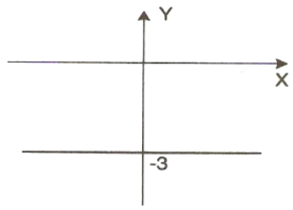
O conjunto imagem é o conjunto unitário $Im(f) = \{k\}$.

Exemplo 7:

a) $f(x) = 2$



b) $f(x) = -3$



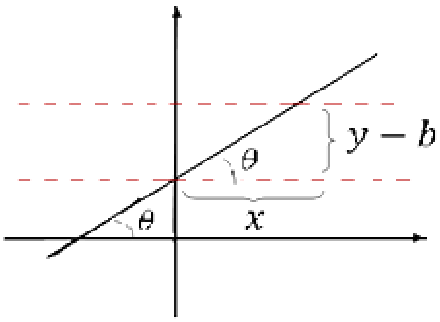
3. Função do primeiro grau

Função do primeiro grau é toda função que associa a cada número real x o número real $ax + b$, $a \neq 0$. Os números reais a e b são chamados, respectivamente, de **coeficiente angular** e **coeficiente linear.** O par *(0,b)*, é a intersecção da reta $y = ax + b$ com o eixo *y*, ou seja, b indica a distância do ponto *(0,b)* à origem do sistema de coordenadas.

Quando $a > 0$ a função $f(x) = ax + b$ é crescente, isto é, à medida que **x** cresce $f(x)$ também cresce. Quando $a < 0$ a função $f(x) = ax + b$ é decrescente: à medida que **x** cresce $f(x)$ decresce.

O gráfico da função $f(x) = ax + b$ é uma reta não paralela aos eixos coordenados se $a \neq 0$.

O domínio de $f(x) = ax + b$ é $D(f) = \mathbb{R}$.



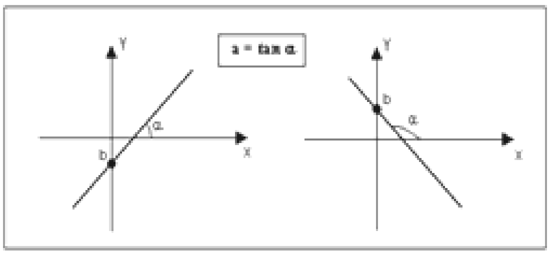
$$tg\theta = \frac{cateto\ \ oposto}{cateto\ \ adjacente} = \frac{y-b}{x} = a,\ pois$$

$$y = ax + b \Rightarrow y - b = ax \Rightarrow a = \frac{y-b}{x}$$

A imagem de f é $\boldsymbol{Im(f)} = \mathbb{R}$

- ✓ Se $\boldsymbol{a = 0}$ então a função $\boldsymbol{f(x) = b}$ é uma função constante.
- ✓ Se $\boldsymbol{b = 0}$ então temos $\boldsymbol{f(x) = ax}$. Trata-se de um conjunto de retas com inclinação $\boldsymbol{a}$, todas passando na origem ***(0,0)***.

Considerando a figura abaixo com a inclinação α:

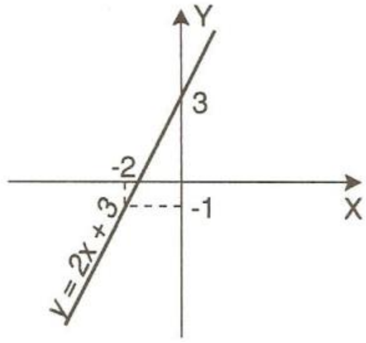


Observe que:

- ✓ se **90°** < α < **180°** ou **270°** < α < **360°** então tgα é negativa e, portanto **a** é negativo.
- ✓ se 0 < α < **90°** ou **180°** < α < **270°** então tgα é positiva e portanto **a** é positivo.

<u>*Exemplo 8:*</u>

a) $f(\mathbf{x}) = \mathbf{2x + 3}$ é uma função de primeiro grau crescente porque $\mathbf{a} > \mathbf{0}$.



b) f(x) = 2x + 20, é uma função de primeiro grau crescente porque $\mathbf{a} > 0$.

c) y = 3 - 2x é uma função de primeiro grau decrescente porque $\mathbf{a} < 0$.

d) f(x) = -3x é uma função de primeiro grau decrescente porque $\mathbf{a} < 0$.

3.1 Aplicação em Física

<u>***O Movimento Retilíneo Uniforme***</u>

É o movimento mais simples da cinemática. Recebe o nome *retilíneo* por considerar apenas trajetórias sobre linhas retas. É dito *uniforme* por possuir velocidade constante, ou seja, distâncias iguais são percorridas em intervalos de tempo iguais.

Dizer que a velocidade é constante significa dizer que ela não varia com o tempo, não muda em um intervalo de tempo considerável. Uma vez que a velocidade é constante, a aceleração, que trata da variação da velocidade é nula.

Como a velocidade é constante, a velocidade instantânea é igual à velocidade média (v_m = v). Se o móvel partir de uma posição inicial e se movimentar com uma velocidade v durante um tempo t, tem-se, a equação horária do movimento retilíneo uniforme:

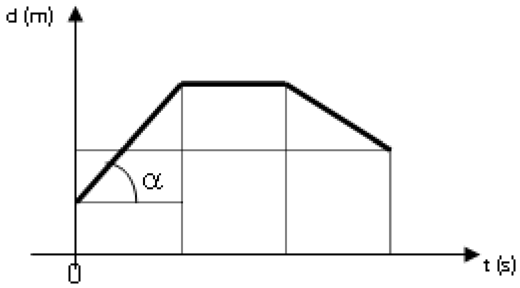
$$S(t) = S_0 + v.t$$

Diagrama Horário Das Posições

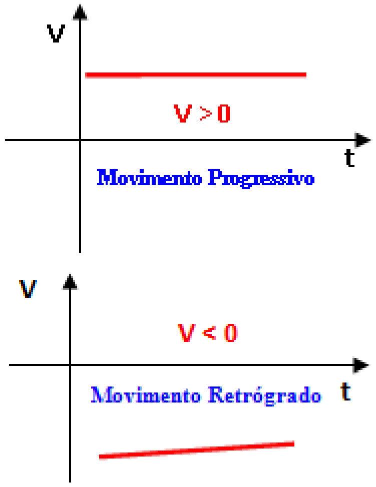
Movimento retilíneo uniforme: o gráfico abaixo apresenta retas (equações do 1º grau). Este gráfico mostra como varia a posição de um móvel durante o seu movimento.

- ✓ Retas inclinadas ascendentes indicam um movimento progressivo.
- ✓ Retas inclinadas descendentes indicam um movimento retrógrado.
- ✓ Retas horizontais indicam que o corpo está em repouso.

Propriedade: a inclinação das retas deste gráfico representa a velocidade do móvel.



Velocidade versus tempo



4. Função Quadrática

A função $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{b}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$ é chamada função de 2° grau ou função quadrática. Seu domínio é $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{f}) = \mathbb{R}$.

O gráfico de uma função quadrática é uma parábola com eixo de simetria paralelo ao eixo dos $\boldsymbol{y}$. Se o coeficiente de $\boldsymbol{x}^2$ for positivo ($\boldsymbol{a} > 0$), a parábola tem a concavidade voltada para cima. Se $\boldsymbol{a} < 0$, a parábola tem a concavidade voltada para baixo. A interseção do eixo de simetria com a parábola é um ponto chamado vértice. A interseção da parábola com o eixo dos $\boldsymbol{x}$ define os zeros da função.

4.1 Zeros (ou raízes) de uma função do 2° Grau

Denominam-se zeros ou raízes de uma função quadrática os valores de x que anulam a função, ou seja, que tornam f(x) = 0. Em termos de representação gráfica, são as abscissas dos pontos onde a parábola corta o eixo x. Denomina-se equação do 2º grau com uma variável toda equação da forma $ax^2 + bx + c = 0$, onde x é a variável e a, b, c reais com $a \neq 0$.

Observação: c é a ordenada do ponto (0, c), onde a parábola corta o eixo y.

Resolver uma equação significa determinar o conjunto solução (ou conjunto verdade) dessa equação. Para a resolução das equações do 2º grau, utilizamos a Fórmula Resolutiva ou Fórmula de Bháskara dada abaixo:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad onde \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

Se $\Delta \geq 0$ temos raízes reais;

Se $\Delta < 0$, não temos raízes reais, mas sim raízes complexas.

Exemplo 9:

1. Dada a função $f(x) = \mathbf{x^2 - 6x + 5}$, calcular os zeros desta função.

1º passo: Primeiramente devemos identificar os coeficientes:

$a=1 \quad b = -6 \quad c = 5$

2º passo: Calcular Δ:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$= (-6)^2 - 4\cdot 1\cdot 5$$
$$= 16$$

4º passo: Como o resultado foi positivo, vamos obter os valores *x* solução:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$= \frac{-(-6) \pm \sqrt{16}}{2\cdot 1}$$
$$= \begin{cases} 5 \\ 1 \end{cases}$$

5º passo: Conjunto Solução *S={1,5}*.

2. Determine as soluções de:

$$x^2 - 8x + 16 = 0$$

Novamente identificam-se os coeficientes:

$$a=1 \quad b=-8 \quad c=16$$

Então obtemos Δ:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$= (-8)^2 - 4\cdot 1\cdot 16$$
$$= 0$$

E finalmente as soluções:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{0}}{2\cdot 1} = 4$$

Logo, a solução será S={4}

3. Determine (se existirem) as raízes da função $f(x) = x^2 - 2x + 20$

Identificar os coeficientes:

$$a=1 \quad b=-2 \quad c=20$$

Calcular Δ:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$= 4 - 80$$
$$= -76$$

Logo, quando o Δ (discriminante) é um número negativo, não existe solução no conjunto dos números reais. Veja:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{-76}}{2}$$

Ops!? Raiz quadrada de número negativo não é real!

A solução é $S = \phi$, chamada solução vazia ou nula.

Dada uma função quadrática qualquer $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$, com $\boldsymbol{a \neq 0}$, usando a técnica de completar os quadrados, podemos facilmente escrevê-la na forma

$$y = a(x - x_v)^2 + y_v$$

onde,

$$x_v = \frac{b}{2a} \qquad \text{e} \qquad y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

sendo $(\mathbf{x_v}, \mathbf{y_v})$ o **vértice da parábola**. Neste caso o eixo de simetria é dado por $\mathbf{x = x_v}$.

Dedução

Seja $ax^2 + bx + c$, isolando a temos:

$$ax^2 + bx + c = a.\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$
$$= a.\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$$
$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$
$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$
$$= a(x - x_v)^2 + y_v$$

Onde,

$$x_v = -\frac{b}{2a} \quad \text{e} \quad y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

<u>*Exemplo 10:*</u>

A parábola dada por $\mathbf{y = x^2 - 6x + 5}$ pode ser escrita como:

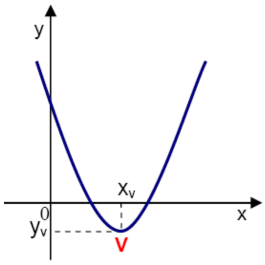
$$y = (x-3)^2 - 4$$

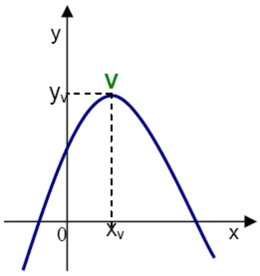
O vértice da parábola é $(\boldsymbol{x_v}, \boldsymbol{y_v}) = (\mathbf{3}, -\mathbf{4})$ e o eixo de simetria é $\boldsymbol{x = 3}$.

4.2 Valor máximo e valor mínimo da função do 2° Grau

Examinando os gráficos abaixo, observa-se que:

- ✓ Se $a > 0$ então $y_v = -\dfrac{\Delta}{4a}$ é o valor mínimo da função;
- ✓ Se $a < 0$ então $y_v = -\dfrac{\Delta}{4a}$ é o valor máximo da função.





Podemos encontrar os máximos e mínimos desta maneira para uma função de segundo grau.

4.3 Aplicação em Física

A função do 2º grau está presente em inúmeras situações cotidianas. Na Física ela possui um papel importante na análise dos movimentos uniformemente variados (MUV), pois em razão da aceleração, os corpos variam tanto sua posição quanto sua velocidade em função do tempo. A expressão que relaciona o espaço em função do tempo é dada pela expressão:

$$S = S_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

onde a é a aceleração, S_0 é a posição inicial e V_0 é a velocidade inicial.

<u>*Exemplo 11:*</u>

a) Um móvel realiza um MUV obedecendo à função S = $2t^2$ - 18t + 36, sendo S medido em metros e t em segundos. Em que instante o móvel muda o sentido de seu movimento?

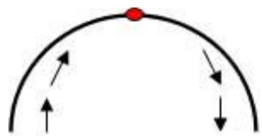
Resolução: A equação do movimento é do segundo grau, então ela descreve uma parábola côncava (a = 2, a > 0). A mudança de sentido de movimentação do móvel se dará no momento em que ele atingir o ponto mínimo da parábola. Observe a ilustração do movimento do móvel abaixo (gráfico de *S versus t)*:

Devemos calcular o ponto mínimo da parábola (mínimo valor da posição), dado por:

$$t_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-18)}{2.2} = \frac{18}{4} = 4{,}5s$$

b) Um canhão atira um projétil, descrevendo a função s = $-9t^2$ + 120t, sendo s em metros e t em segundos. Calcule o ponto máximo de altura atingida pelo projétil. (Veja o gráfico de *S versus t* para este caso).

Resolução: A função do movimento do projétil descreve uma parábola convexa (a = -9, a < 0). O ponto máximo da parábola será a altura máxima atingida pelo projétil.



Ponto máximo:

$$S_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{[(120)^2 - 4.(-9).0]}{4.(-9)}$$

$$S_v = -\frac{14400}{-36} = 400m$$

5. Função Módulo

O módulo, ou valor absoluto (representado matematicamente como |x|) de um número real *x* é o valor numérico de *x* desconsiderando seu sinal. Está associado à ideia de distância de um ponto até sua origem (o zero), ou seja, a sua magnitude.

A função definida por $\boldsymbol{y} = |\boldsymbol{x}|$ chama-se função módulo. O seu domínio é o conjunto $\boldsymbol{D(f)} = \mathbb{R}$ e o conjunto imagem é $\boldsymbol{Im(f)} = [\mathbf{0}, \infty)$. Então, da definição de módulo, dado um número real x, o módulo (ou valor absoluto) de x, que se indica por | x |, é definido por:

$$|x| = \begin{cases} x, \; se \; x \geq 0 \\ -x, \; se \; x < 0 \end{cases}$$

O significado destas sentenças é:

i. o módulo de um número real não negativo é o próprio número.
ii. ii) o módulo de um número real negativo é o oposto do número.

Então,

- ✓ se x é positivo ou zero, | x | é igual a x.

$$| 3 | = 3$$

- ✓ se x é negativo, | x | é igual a -x.

$$| - 3 | = -(-3) = 3$$

Exemplo 12:

1. Dada a função $f(x) = |2x - 8|$, calcular:

a) $f(5) = |2.5 - 8| = |10 - 8| = |2| = 2$

b) $f(-4) = |2.(-4) - 8| = |- 8 - 8| = |-16| = 16$

1. Resolver a equação $| x^2\text{-}5x | = 6$.

Resolução: Temos que analisar dois casos:

caso 1: $x^2\text{-}5x = 6$
caso 2: $x^2\text{-}5x = -6$

Resolvendo o caso 1:

$$x^2\text{-}5x\text{-}6 = 0 \;\; => \;\; x' = 6 \text{ e } x'' = -1.$$

Resolvendo o caso 2:

$$x^2\text{-}5x+6 = 0 \;\; => \;\; x' = 3 \text{ e } x'' = 2.$$

Resposta: S={-1,2,3,6}

2. Resolver a equação $| x\text{-}6 | = | 3\text{-}2x |$.

Resolução: Temos que analisar dois casos:

caso 1: $x\text{-}6 = 3\text{-}2x$
caso 2: $x\text{-}6 = -(3\text{-}2x)$

Resolvendo o caso 1:

$$x\text{-}6 = 3\text{-}2x \rightarrow x+2x = 3+6$$
$$3x=9 \rightarrow x=3$$

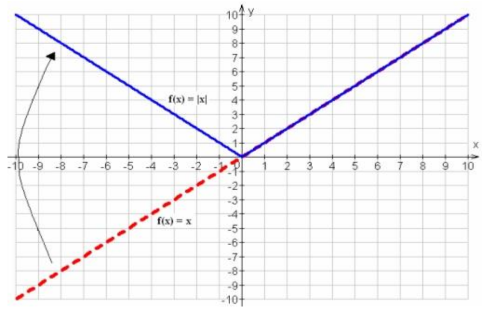
Resolvendo o caso 2:

$$x\text{-}6 = -(3\text{-}2x) \rightarrow x\text{-}2x = -3+6$$
$$-x=3 \rightarrow x=-3$$

Resposta: S={-3,3}

<u>Gráfico</u>

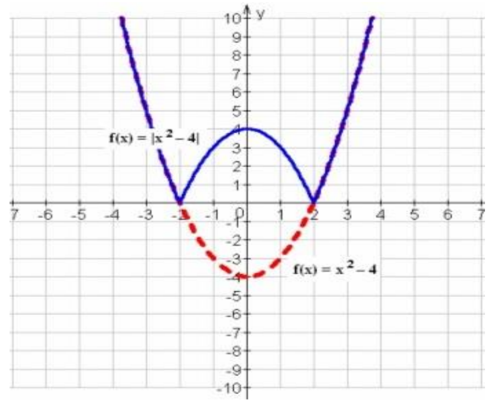
O gráfico de $f(x) = |x|$ é semelhante ao gráfico de $f(x) = x$, sendo que a parte negativa do gráfico será "refletida" em relação ao eixo horizontal, para valores positivos de f(x).



Um outro exemplo para função modular, seria a função modular do segundo grau, sendo $f(x) = |x^2 - 4|$, assim:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, \; se \, |x| \geq 2 \\ -x^2 + 4, \; se \, |x| < 2 \end{cases}$$

Assim temos o gráfico:



Passos

Para construir o gráfico da função modular procedemos assim:

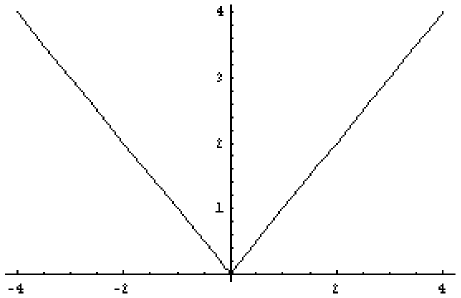
1º passo: construímos o gráfico da função onde f(x)> 0

2º passo: onde a função é negativa, construímos o gráfico de – f(x) ("rebate" para o outro lado na vertical).

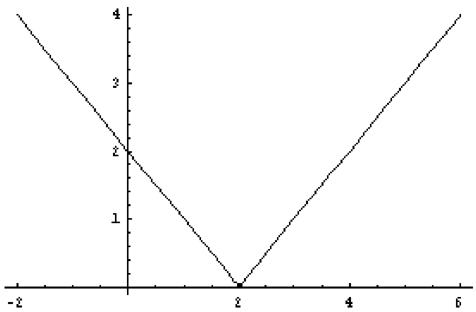
3º passo: une-se os gráficos

<u>*Exemplo 13:*</u>

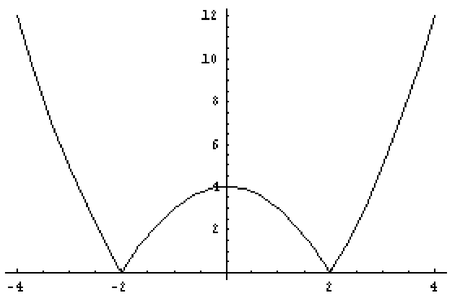
1. $f(x) = |x|$



2. $f(x) = |x - 2|$ (desloca o gráfico acima 2 unidades para a direita)



3. $f(x) = |x^2 - 4|$



6. Inequações modulares

Uma inequação será identificada como modular se dentro do módulo tiver uma expressão com uma ou mais incógnitas, veja alguns exemplos de inequações modulares:

$$|x| > 5$$
$$|x| < 5$$
$$|x - 3| \geq 2$$

Ao resolvermos uma inequação modular buscamos encontrar os possíveis valores que a incógnita deverá assumir, que tornam verdadeira a inequação, e as condições de existência de um módulo.

Condição de existência de um módulo, considerando k um número real positivo:

- ✓ ***Se |x| < k então, – k < x < k***
- ✓ ***Se |x| > k então, x < – k ou x > k***

Para compreender melhor a resolução de inequações modulares veja os exemplos abaixo:

<u>*Exemplo 14:*</u> $|x| \leq 6$

Utilizando a seguinte definição: se $|x| < k$ então, $-k < x < k$, temos que:

$$-6 \leq x \leq 6$$

$$S = \{x \in R \ / -6 \leq x \leq 6\}$$

<u>*Exemplo 15:*</u>

$$|x - 7| < 2$$

Utilizando a seguinte definição: se $|x| < k$ então, $-k < x < k$, temos que:

$$-2 < x - 7 < 2$$
$$-2 + 7 < x < 2 + 7$$
$$5 < x < 9$$

S = {x Є R / 5 < x < 9}

Exemplo 16:

$$|x^2 - 5x| > 6$$

Precisamos verificar as duas condições:

|x| > k então, x < – k ou x > k
|x| < k então, – k < x < k

Fazendo $|x| > k$ então, $x < -k$ ou $x > k$

$$x^2 - 5x > 6$$
$$x^2 - 5x - 6 > 0$$

Aplicando Bháskara temos:

$$x' = 6$$

$$x'' = -1$$

$$x > 6 \text{ ou } \quad x < -1$$

Fazendo $|x| < k$ então, $-k < x < k$

$$x^2 - 5x < -6$$
$$x^2 - 5x + 6 < 0$$

Aplicando Bháskara temos:

$$x' = 3$$
$$x'' = 2$$

Pela propriedade

$$x > 2$$

$$x < 3$$

S = {x Є R / x < –1 ou 2 < x < 3 ou x > 6}.

7. Função Polinomial

É a função $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ definida por $\boldsymbol{f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}$ em que a_o, a_1,..., a_n são números reais chamados **coeficientes** e ***n***, inteiro não negativo, determinam o grau da função.

O gráfico de uma função polinomial é uma curva que pode apresentar pontos de máximos e de mínimos. Seu domínio é sempre o conjunto dos Reais.

Exemplo 17:

1. A função constante $\mathbf{f(x) = k}$ é uma função polinomial de grau zero.
2. A função $\mathbf{f(x) = ax + b, a \neq 0}$ é uma função polinomial de primeiro grau.
3. A função quadrática $\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0}$ é uma função polinomial de segundo grau.
4. A função $\mathbf{f(x) = x^3}$ é uma função polinomial cúbica.
5. A função $\mathbf{f(x) = 5x^5 - 6x + 7}$ é uma função polinomial de quinto grau.

8. Função Exponencial

As funções que chamamos de exponenciais são da forma $f(x) = a^x$, estas funções possuem este nome, pois a variável x está no expoente[5].

Observação: não devemos confundir funções $f(x) = a^x$ exponenciais com a função potência $g(x) = x^2$, pois nas funções tipo potência a variável x está na base.

Na função $f(x) = a^x$, a é à base da função exponencial e é um número real ($0 < a \neq 1$).

Observação: por conveniência em muitos livros matemáticos e científicos usa-se a Exponencial Natural (exponencial de base e) para representar o a função exponencial, isso se deve a sua vasta aplicação nessas áreas. Já a representação de base a serve para representar os Logaritmos Comuns.

Este tipo de função possui como domínio $D(f) = (-\infty, \infty) = \Re$ e respectiva imagem $\text{Im}(f) = (0, \infty) = \Re_+^*$

Leis da Função Exponencial: se a e b forem números positivos e x e y, números reais quaisquer, então:

$$a^x \times a^y = a^{(x+y)} \qquad a^x \div a^y = a^{(x-y)}$$
$$(a^x)^y = a^{xy} \qquad a^x \times b^x = (ab)^x$$
$$a^0 = 1 \qquad a^1 = a$$

<u>*Exemplo:*</u>

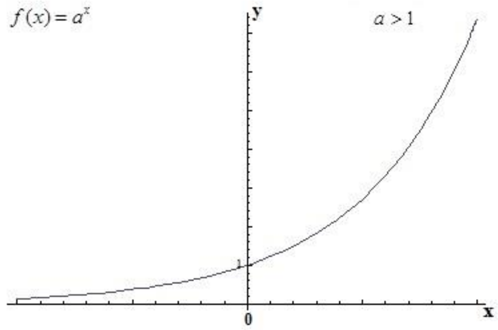
a) $2^3 \times 2^8 = 2^{(3+8)} = 2^{11}$
b) $e^2 \times e^5 = e^{(2+5)} = e^7$
c) $3^5 \div 3^9 = 3^{(5-9)} = 3^4$
d) $e \div e^6 = e^{(1-6)} = e^5$
e) $\dfrac{6^7}{6^9} = 6^7 \times \dfrac{1}{6^9} = 6^7 \times 6^{-9} = 6^{(7-9)} = 6^2$
f) $(4^4)^6 = 4^{(4\times 6)} = 4^{24}$
g) $(e^2)^3 = e^{(2\times 3)} = e^6$
h) $2^2 \times 3^2 = (2\times 3)^2 = 6^2$
i) $e^3 \times 2^3 = (2\times e)^3 = (2e)^3$

Gráficos da Função Exponencial

Os gráficos das funções exponenciais podem ser do tipo crescente, constante ou decrescente, isso dependerá exclusivamente do valor da base a.

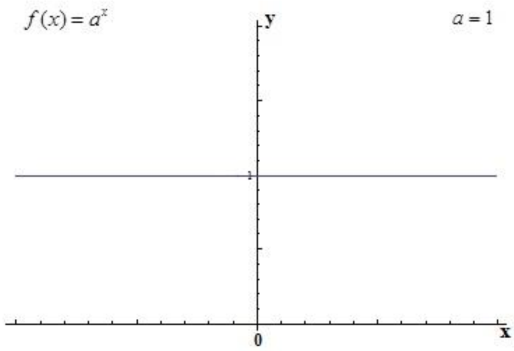
Observe as figuras a seguir:

(a) Função exponencial crescente



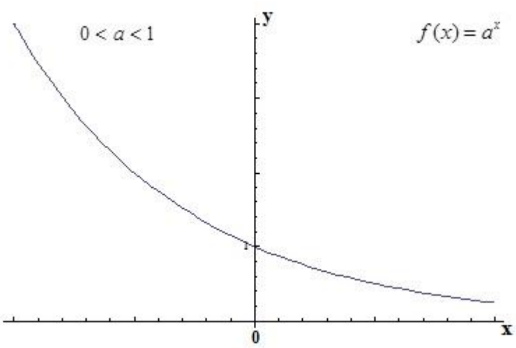
- ✓ A função será crescente se $a > 1$.
- ✓ A função corta o eixo das ordenadas no ponto (0,1).
- ✓ Possui domínio $D(f) = \Re$ e imagem $\text{Im}(f) = \Re_+^*$.

(b) Função exponencial constante



- ✓ A função será constante se $a = 1$.
- ✓ A função corta o eixo das ordenadas no ponto (0,1).
- ✓ Possui domínio $D(f) = \Re$ e Imagem $\text{Im}(f) = 1$.

(c) Função exponencial decrescente



- ✓ A função será decrescente se $0 < a < 1$.

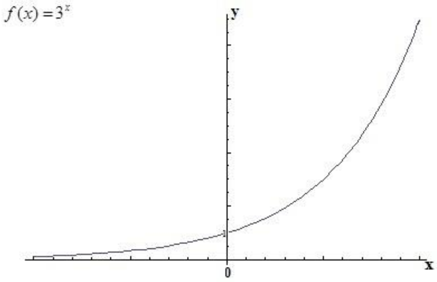
✓ A função corta o eixo das ordenadas no ponto (0,1).
✓ Possui domínio $D(f) = \Re$ e Imagem $\text{Im}(f) = 1$.

A partir dos gráficos da função $f(x) = a^x$ visto acima podemos afirmar:

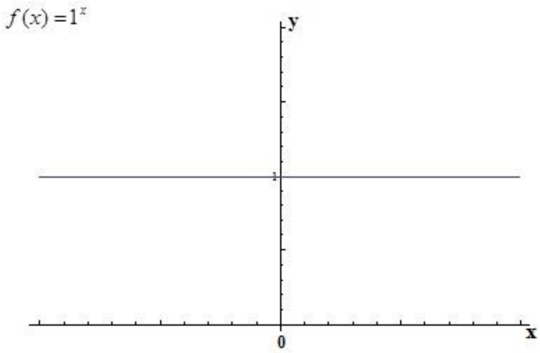
1. A curva que o representa esta todo acima do eixo das abcissas, pois $f(x) = a^x > 0$ para todo $x \in \Re$.
2. A função corta o eixo das ordenadas no ponto (0,1).
3. A função será crescente se $a > 1$, constante se $a = 1$ e decrescente se $0 < a < 1$.

Exemplos de gráficos:

a) $f(x) = 3^x$



b) $f(x) = 1^x$



c) $f(x) = 0.3^x$

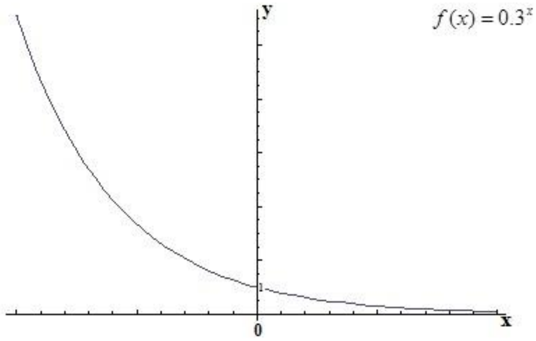
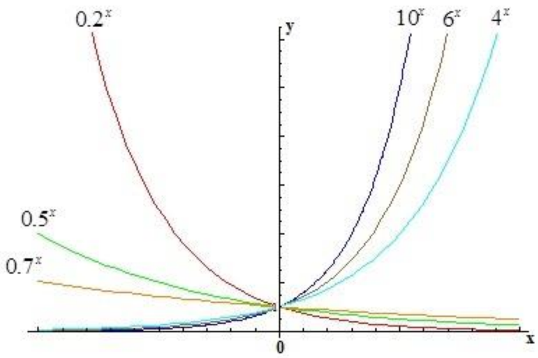


Gráfico da função $f(x) = a^x$ em várias bases:

Observação: Repare na abertura das curvas em relação ao eixo das ordenadas de acordo com o valor da base a^x.



Funções exponenciais e suas aplicações:

O estudo das funções exponenciais se faz necessários, pois estas funções ocorrem frequentemente em modelos matemáticos que descrevem a natureza, economia e sociedade[3].

9. Composição de Funções

Composição de funções é uma maneira de combinar funções para que estas gerem uma nova função[4], denotado por $(f \circ g)(x)$ ou $f(g(x))$, o procedimento se chama de composição, pois a nova função gerada é composta por outras duas ou mais funções.

Definição: dada duas funções f e g, a composição de f com g é definida por:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Observação: o inverso também vale, dada duas funções g e f é possível existir uma composição de g com f. Nos dois casos a composição deve respeitar o domínio e a imagem das duas funções que a geram.

O domínio da função composta compreende o conjunto de todos os pontos x no domínio de g tal que sua imagem $g(x)$ está no domínio de f [2].

Simbolicamente isto significa:

$$D(f \circ g)(x) = \{x \in D(g) \,/\, g(x) \in D(f)\}$$

Exemplo:

1) Se $f(x) = x^2$ e $f(x) = x - 3$, encontre a função composta $(f \circ g)(x)$ e $(g \circ f)(x)$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (x-3)^2$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x^2 - 3)$$

Note que o resultado de $(f \circ g)(x)$ e $(g \circ f)(x)$ são diferentes, logo $(f \circ g)(x)$ e $(g \circ f)(x)$ não é a mesma operação.

2) Se $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \sqrt{2-x}$, encontre a composição $(f \circ g)(x)$, $(f \circ f)(x)$ e seus respectivos domínios.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{\sqrt{2-x}} = \sqrt[4]{2-x}$$

O domínio de $D(f \circ g)(x) = (-\infty, 2]$.

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$$

O domínio de $D(f \circ f)(x) = [0, \infty)$.

3) Se $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, $g(x) = x^{10}$ e $h(x) = x - 3$, faça a composição $(f \circ g \circ h)(x)$.

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x))) = \frac{(x-3)^{10}}{(x+3)^{10} + 1}$$

10. Função Inversa

Em muitas ocasiões quando estudamos uma função do tipo $y = f(x)$, nos deparamos com a necessidade de estuda-la como sendo uma função do seguinte tipo $x = f(y)$. Essa função é chamada de função inversa de f, denotada por f^{-1}.

Exemplo:

	Função	Inversa
1)	$f(x) = x^3$	$f^{-1}(x) = x^{-1/3}$
2)	$f(x) = x - 2$	$f^{-1}(x) = x + 2$
3)	$y = x^3 - 9$	$x = \sqrt[3]{y+9}$
4)	$y = 2x - 5$	$x = \dfrac{1}{2}(y+5)$

Observação: Não são todas as funções que possuem inversas.

Para que uma função $y = f(x)$ admita uma inversa, a função f nunca poderá assumir duas vezes o mesmo valor para dois valores diferentes de x [4], ou seja:

$$f(x_1) \neq f(x_2)$$

Exemplo:

Para uma função qualquer se $f(a) = f(b)$ (para a e b reais e $a \neq b$) está função não admitirá uma inversa. Já para uma outra função qualquer se $f(a) \neq f(b)$ (para a e b reais e $a \neq b$) está função admitirá uma inversa.

Observação: Uma função f é chamada de *função um a um* se ela nunca assume o mesmo valor duas vezes[4], isto é:

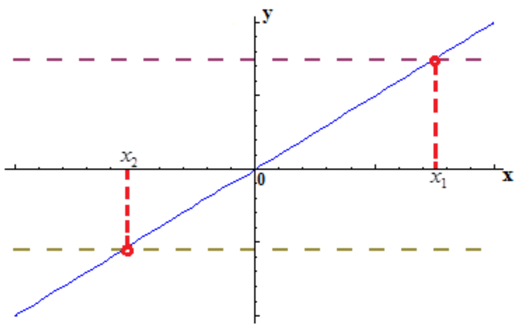
$$f(x_1) \neq f(x_2) \quad para \quad x_1 \neq x_2$$

Outro método para saber se uma função é uma a um é através do Teste da Reta Horizontal.

Teste da Reta Horizontal.

Uma função é um a um se e somente e se toda reta horizonta intercepta seu gráfico em apenas um ponto[1], ou seja:

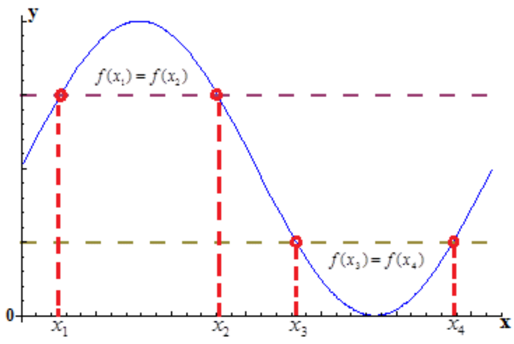
Gráfico:



Observação: Repare que para qualquer que sejam os valores de x_1 e x_2 não haverá um mesmo valor de f

Se uma reta horizontal intercepta o gráfico de uma função f em mais de um ponto isso significa que existem números x_1 e x_2 tais que $f(x_1) = f(x_2)$, ou seja, não é uma um.

Gráfico:



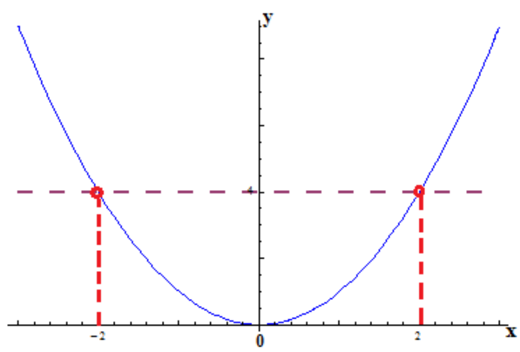
Observação: Repare que existem vários valores de x_1 e x_2 que resultam em um mesmo valor de f .

Exemplo:

1) A função $g(x) = x^2$ é uma função um a um?

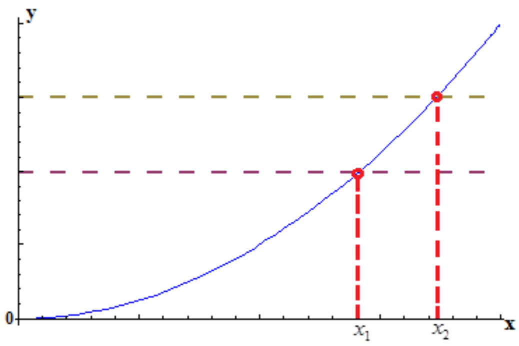
Essa Função não é uma função um a um, pois:

$$g(-2) = 4 \quad e \quad g(2) = 4$$
$$g(-2) = g(2)$$



Observação: a função $g(x) = x^2$ com domínio $D(f) = \Re$ não possui inversa, pois não é uma função um a um, porém se seu domínio for restringido para apenas $D(f) = \Re_+$ *ou* $D(f) = \Re_-$ assim a função $g(x) = x^2$ admitirá uma inversa, pois ela se torna uma função um a um.

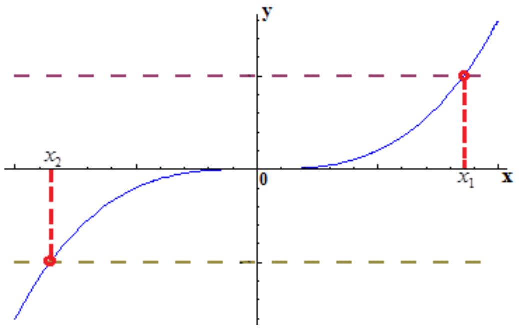
$$g(x) = x^2, \quad x \geq 0$$



2) A função $f(x) = x^3$ é uma função um a um?

Esta função é um a um, pois:

$$x_1 \neq x_2$$
$$f(x_1) \neq f(x_2)$$



Domínio e Imagem de uma Função Inversa

Uma função qualquer f um a um com domínio $D(f) = A$ e imagem $\mathrm{Im}(f) = B$, logo sua função inversa terá com domínio $D(f^{-1}) = B$ e imagem $\mathrm{Im}(f^{-1}) = A$.

domínio de f = imagem de f^{-1}
imagem de f = domínio de f^{-1}

11. Função Logarítmica

A função logarítmica é a função inversa da função exponencial e é denotada por $\log_a$.

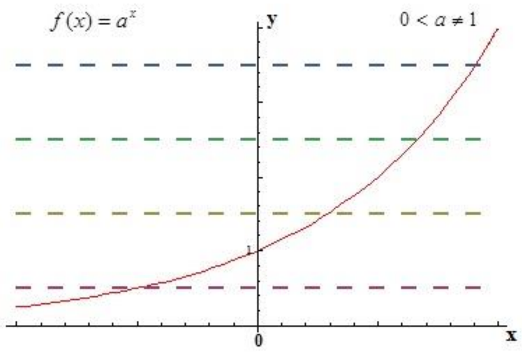
Na função $f(x) = \log_a x$, a é à base da função logarítmica e é um número real ($0 < a \neq 1$).

Observação: por conveniência em muitos livros matemáticos e científicos usa-se o Logaritmo Natural (logaritmo de base e, $\log_e = \ln$) para representar a função logarítmica, isso se deve a sua vasta aplicação nessas áreas. Já a representação de $\log_a$ serve para representar os Logaritmos Comuns[1].

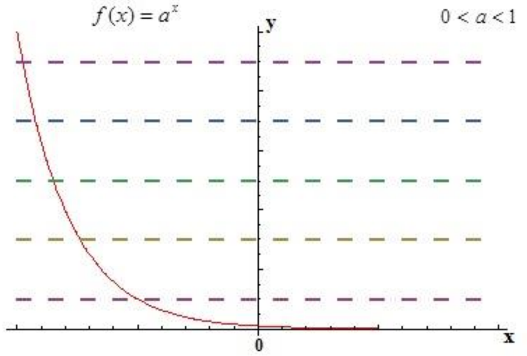
A função exponencial permite uma função inversa se sua base a estiver no intervalo $a > 0$ e $a \neq 1$, pois nesse intervalo a função exponencial será crescente ou decrescente e usando o Teste da Reta Horizontal notamos que a função será um a um.

Demonstração do Teste da Reta Horizontal na função exponencial.

(a) Função exponencial crescente:



(b) Função exponencial decrescente:



Após esse teste observamos que a função exponencial é um a um pelo Teste da Reta Horizontal, logo esta função admite uma inversa. Agora usando a formulação da função inversa temos:

$$f^{-1}(x) = y \qquad \Leftrightarrow \qquad f(y) = x$$

$$\log_a x = y \qquad \Leftrightarrow \qquad a^y = x$$

Este tipo de função possui como domínio $D(f) = (0, \infty) = \Re_+^*$ e respectiva imagem $\mathrm{Im}(f) = (-\infty, \infty) = \Re$.

Observação: Veja que o domínio da função logarítmica não está definido no ponto $x = 0$ e nos $x = \Re_-^*$.

Propriedades da Função Logarítmica:

$$\log_a(a^x) = x \text{ para todo } x \in \Re$$
$$a^{\log_a x} = x \text{ para todo } x > 0$$

Observação: Repare que quando temos o logaritmo de uma exponencial e ambos possuem a mesma base o resultado é o expoente x. Repare também que a exponencial de um logaritmo o resultado é x.

Leis da Função Logarítmica: para valores de x e y positivos e r qualquer número real.

1) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
2) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
3) $\log_a(x^r) = r\log_a x$
4) $\log_a(1) = 0$

<u>*Exemplo:*</u>

Usando as leis e propriedades acima vamos reescrever as funções abaixo de outra maneira.

1) Desacople as funções abaixo:

a) $\log_2(\frac{32}{4}) = \log_2(\frac{2^5}{2^2}) = \log(2^{(5-2)}) = 2^3$

b) $\log_3 3x = \log_3 3 + \log_3 x = 1 + \log_3 x$

c) $\log_3\left(\frac{x}{y}\right) = \log_3 x - \log_3 y$

d) $\log_{10}\left(\frac{x^2-4}{x-2}\right) = \log_{10}(x^2-4) - \log_{10}(x-2)$
$= \log_{10}(x+2) + \log_{10}(x-2) - \log_{10}(x-2)$
$= \log_{10}(x+2)$

e) $\ln\left(\frac{e^{2x}}{5}\right) = \ln(e^{2x}) - \ln(5) = 2x\ln(e) - \ln(5)$
$= 2x - \ln(5)$

f) $\ln(5e^{10}) = \ln(5) + \ln(e^{10}) = \ln(5) + 10\ln(e)$
$= \ln(5) + 10$

g) $\ln\left(\frac{e^{2x}-16}{e^x-4}\right) = \ln(e^{2x}-16) - \ln(e^x-4)$
$= \ln(e^x+4) + \ln(e^x-4) - \ln(e^x-4)$
$= \ln(e^x+4)$

2) Combine as funções abaixo:

a) $\log_2(x^2-16) - \log_2(x^3) == \log_2\left(\frac{x^2-16}{x^3}\right)$

b) $\log_{10} x + \log_{10}(x-1) = \log_{10}(x(x-1))$

c) $\ln a - \frac{1}{2}\ln b = \ln a - \ln b^{\frac{1}{2}} = \ln(\frac{a}{\sqrt{b}})$

d) $2\log_{10}(x) + 3\log_{10}(y) = \log_{10}(x^2) + \log_{10}(y^3)$

$= \log_{10}(x^2 y^3)$

3) Encontre o valor de x nas equações:

a) $2^{x+1} = 3$

$\log_2 2^{x+1} = \log_2 3$

$x + 1 = \log_2 3$

$x = \log_2 3 - 1$

b) $\ln(2x-2) - \ln(x) = 3$

$\ln\left(\frac{2x-2}{x}\right) = 3$

$e^{\ln\left(\frac{2x-2}{x}\right)} = e^3$

$\left(\frac{2x-2}{x}\right) = e^3$

$2x - 2 = xe^3$

$x(2 - e^3) = 2$

$x = \frac{2}{2 - e^3}$

Mudança de base nas Funções Logarítmicas:

Em algumas situações nos deparamos com a necessidade de calcular o logaritmo em algumas bases específicas, fora do comum, que não se encontram normalmente em calculadoras. Essa técnica permite você manipular sua função logarítmica para deixa-la em função de uma base desejada.

Para encontrar um logaritmo com uma base b desejada usando qualquer outra base a temos:

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$$

Demonstração:

Seja uma função exponencial do tipo $x = b^k$ então:

$$x = b^k \quad \Leftrightarrow \quad \log_b x = k$$

Assim

$$x = b^k \quad \Leftrightarrow \quad \log_a x = k \log_a b$$

$$k = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Substituindo respectivamente o valor de k temos:

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$$

Exemplo:

1) Calcular o $\log_8 10$ em relação ao logaritmo natural e ao de base 10:

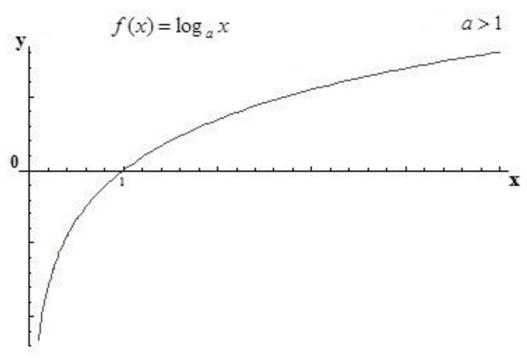
$$\log_8(10) = \frac{\ln(10)}{\ln(8)}$$

$$\log_8(10) = \frac{\log_{10}(10)}{\log_{10}(8)}$$

Gráficos da Função Logarítmica

Com relação aos gráficos da função logarítmica $f(x) = \log_a x$ temos:

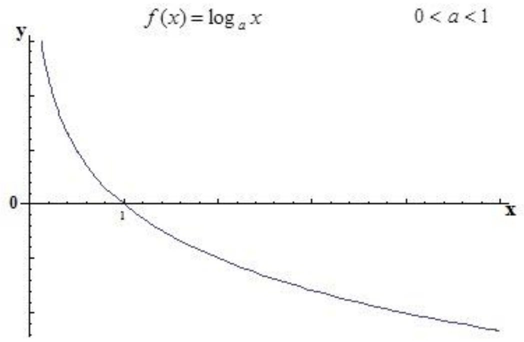
(a) Para $a > 1$



- ✓ A função é crescente para $a > 1$.
- ✓ O gráfico está à direita do eixo das ordenadas.
- ✓ Corta o eixo das abscissas no ponto $(1,0)$.

- ✓ Possui domínio $D(f) = \Re_+^*$ e imagem $\text{Im}(f) = \Re$.

(b) Para $0 < a < 1$

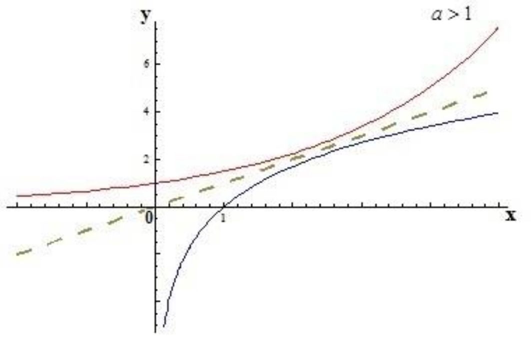


- ✓ A função é decrescente para $0 < a < 1$.
- ✓ O gráfico está á direita do eixo das ordenadas.
- ✓ Corta o eixo das abscissas no ponto $(1,0)$.
- ✓ Possui domínio $D(f) = \Re_+^*$ e imagem $\text{Im}(f) = \Re$.

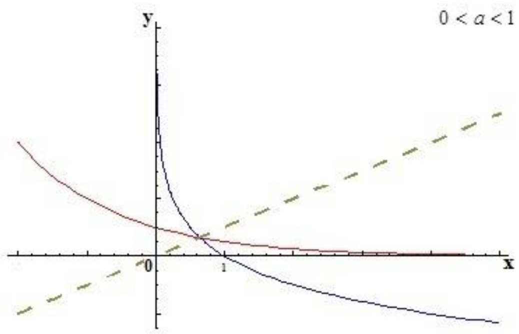
A partir dos gráficos da função logarítmica $f(x) = \log_a x$ vistos acima podemos afirmar:

1. A curva que representa a função logarítmica crescente e decrescente está toda à direita do eixo das ordenadas.
2. O domínio e imagem de ambos os gráficos da função logarítmica crescente e decrescente são respectivamente $D(f) = \Re_+^*$ e $\text{Im}(f) = \Re$.
3. Ambos os gráficos cortam o eixo das abscissas no ponto $(1,0)$.
4. Os gráficos da função $f(x) = \log_a(x)$ são simétricos aos gráficos da função exponencial $g(x) = a^x$ em relação a uma reta $y = x$ como pode ser observado abaixo.

Simetria entre $f(x) = \log_a(x)$ e $g(x) = a^x$ para $a > 1$.

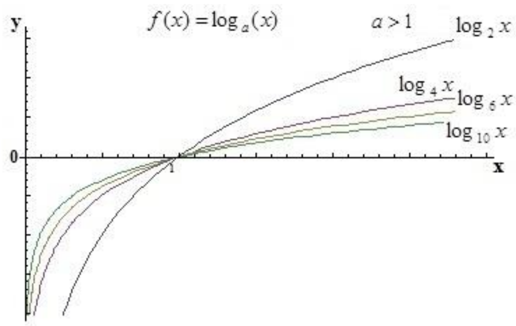


Simetria entre e $g(x) = a^x$ para $0 < a < 1$.

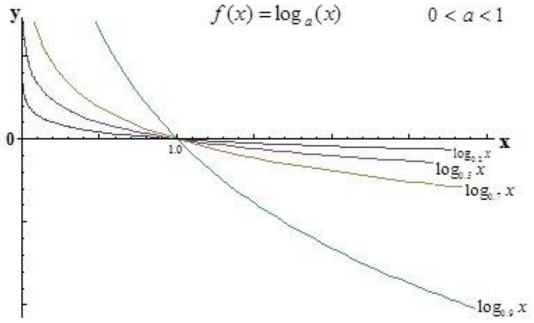


Família de Gráfico da função logaritmo

1) Para diversas bases de $a > 1$.

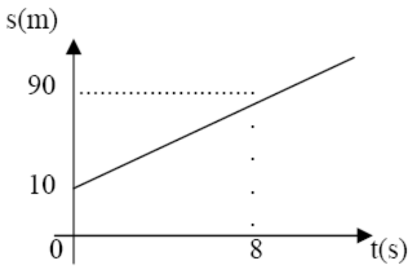


2) Para diversas bases de $0 < a < 1$.

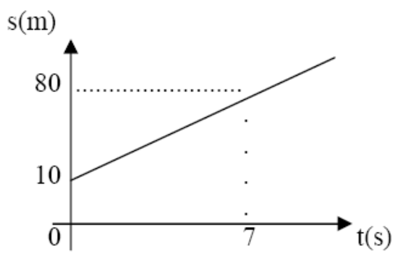


Exercícios Propostos

1. O gráfico abaixo indica a posição de um móvel no decorrer do tempo, sobre uma trajetória retilínea. Determine: a) a velocidade do móvel. b) a função horária *s(t)* do móvel.



2. O gráfico abaixo indica a posição de um móvel no decorrer do tempo, sobre uma trajetória retilínea. Determine: a) a velocidade do móvel. b) a função horária *s(t)* do móvel.



3. Dada a função *f*, calcule os zeros desta função, sendo:

   a) $f(x) = x^2 - 7x + 6$

   b) $f(x) = x^2 - 2x + 6$

   c) $f(x) = -x^2 - 2x - 1$

   d) $f(x) = x^2 - 3$

   e) $f(x) = -x^2 + 36$

   f) $f(x) = (x - 4)^2$

   g) $f(x) = (x + 9)^2$

4. Determinar o domínio da função dada por:

   a) $y = -10x + 4$

   b) $y = 10x + 1$

   c) $y = 9 - x$

   d) $y = \dfrac{2}{x - 6}$

   e) $y = \dfrac{x - 4}{x}$

   f) $y = \dfrac{x - 10}{9}$

   g) $y = \sqrt{x - 5}$

   h) $y = \sqrt[3]{x - 4}$

   i) $y = \dfrac{1}{-6x + 8}$

   j) $y = \sqrt{x + \dfrac{15}{4}}$

   k) $y = \dfrac{1}{\sqrt{-4x + 3}}$

5. Representar graficamente as funções dadas por:

   a) $y = -10x + 4$

   b) $y = 10x + 4$

   c) $y = 4$

   d) $y = -x$

   e) $y = -4x + 4$

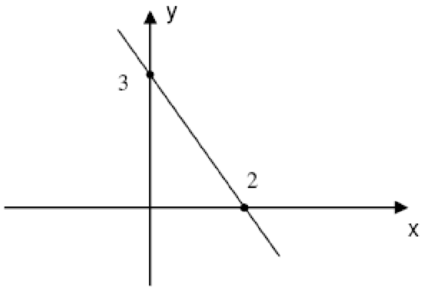
   f) $y = \dfrac{1}{x}$

   g) $x = 9$

6. Encontre as raízes das seguintes funções abaixo:
   a) $y = 10x + 4$
   b) $y = x$
   c) $y = 4$
   d) $y = -x + 4$
   e) $y = \dfrac{1}{10x + 4}$
   f) $y = \dfrac{1}{\sqrt{-x + 3}}$
   g) $y = \dfrac{1}{x - 4}$
7. Represente geometricamente uma reta que:
   a) passe pelo ponto (2, 0) e que tenha coeficiente angular igual a -2.
   b) passe pelo ponto (0, 2) e que tenha coeficiente angular igual a -2.
   c) passe pelo ponto (0, −2) e que tenha coeficiente angular igual a 2.
   d) passe pelo ponto (1, 2) e que tenha coeficiente angular igual a -1.
   e) passe pelo ponto (−1, 2) e que tenha coeficiente angular igual a 1/2.
   f) passe pelo ponto (−1, 0) e que tenha coeficiente angular igual a -1/2.

8. Obtenha as funções de 1º grau que passam pelos pares de pontos abaixo:
   a) (-1, 2) e (2, -1)
   b) (-1, 0) e (3, 2)
   c) (3,2) e (-1,0)

9. Determine a equação da reta cujo gráfico está representado abaixo:



10. Determine a função do 1º grau cujo gráfico passa pelo ponto (2, 3) e cujo coeficiente linear vale 5.

11. Dada a função *y = 3x – 2*, encontre o valor de x em que a ordenada y é o seu dobro.

12. Dada a função *y = –2x + 1*, encontre os valores onde a reta intercepta os eixos x e y.

13. Dada a função *y = 2/3x + 10*. Encontre os valores onde a reta intercepta os eixos x e y.

14. Determine a equação da reta que passa por (1,5) e tem coeficiente angular igual a 20.

15. Seja a reta dada por *y = -3x + b*. Determine o valor de b para que a reta corte o eixo as ordenadas no ponto (0,5).

16. Dadas as funções $f(x) = x + 2$ e $g(x) = x - 4$, encontre os valores de x para os quais $g(x) = f(x)$.

17. Com o objetivo de treinar as propriedades de exponenciais já vistas, reescreva as funções abaixo usando as propriedades.

a) $f(x) = 2^3 \times 3^3$ b) $f(x) = 5^x \times 5^x$
c) $f(x) = 7^x \div 7^x$ d) $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{e^{7x}}$
e) $f(x) = (7^6)^7$ f) $f(x) = 7^x \times 6^x$
g) $f(x) = 6^2 \div 6^7$ h) $f(x) = e^2 \times 7^2$

i) $f(x)=\dfrac{9^8}{9^6}$ j) $f(x)=(e^3)^2$

18. Em um mesmo gráfico represente as funções exponenciais a seguir.

a) $f(x)=2^x$, $f(x)=e^x$, $f(x)=1.5^x$, $f(x)=15^x$, $f(x)=7^x$.
b) $f(x)=0.2^x$ $f(x)=0.7^x$ $f(x)=0.5^x$ $f(x)=0.1^x$

19. Seja $f(x)=x+3$ e $g(x)=\sqrt{x}$, encontre;
a) $(f\circ f)(x)$
b) $(f\circ g)(x)$
c) $(g\circ f)(x)$
d) $(g\circ g)(x)$.

20. Encontre $(h\circ g\circ f)(x)$, sendo $h(x)=e^{-x}$, $g(x)=x^4$, $f(x)=\sqrt{x}$

21. Se $f(x)=\sqrt{x}$ e $g(x)=\sqrt{2-x}$, encontre a composição $(g\circ f)(x)$, $(g\circ g)(x)$ e seus respectivos domínios.

22. Encontre a formula da função inversa das funções abaixo:
a) $y=3x+4$
b) $y=\dfrac{1}{x-a}$
c) $y=\dfrac{x+a}{x-a}$
d) $y=\dfrac{1}{x},\quad x>0$
e) $y=\sqrt{x-1},\quad x\geq 1$
f) $y=-\sqrt{a-x},\quad x\leq a$
g) $y=\dfrac{x^2}{x^2+1},\quad x\geq 0$
h) $y=x^2-4,\quad x\geq 0$

23. Faça o gráfico das funções abaixo e veja se os mesmo são um a um.
a) $f(x)=e^x$
b) $f(x)=16-x^2$
c) $f(x)=-x^5$
d) $f(x)=2x+3$

24. Através das tabelas de valores abaixo geradas por uma função qualquer descubra se a função é um a um ou não.
a)

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1.0	2.5	5.7	8.0	9.3	11.1

b)

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	16	1	0	1	16

25. Usando as propriedades e leis das funções logarítmicas, reescreva as funções abaixo.Desacople as funções abaixo:

a) $\log_3 27x^2$
b) $\ln\left(\dfrac{x^2-1}{x+1}\right)$
c) $\log_2\left(\dfrac{x^3-1}{x^2+2}\right)$
d) $\ln(x^3-x)$
e) $\log_{10} ax^n$

Combine as funções abaixo:

f) $\dfrac{1}{2}\log_2 e-3\log_2 a$
g) $\log_{10} x+n\log_{10} y$
h) $\ln(x+1)+\ln(x-1)$
i) $3\ln(x^3-4)+\ln b-\ln(x+1)$

26. Encontre o valor de x:

a) Sendo $\ln x = 5$

b) Sendo $\log_{10} x = \dfrac{a}{b}$ onde a e b são constantes reais

c) Sendo $3^{(2x-5)} = 10$

d) $2^{(x^2-1)} = e$

e) $\log_7(5-2x) = -3$

f) $\ln x - \ln(2x-1) = 1$

27. Em um mesmo gráfico represente as funções logarítmicas a seguir:

a) $f(x) = \log_2 x$ $g(x) = \log_5 x$
$h(x) = \log_{10} x$

b) $f(x) = \log_{0.2} x$ $g(x) = \log_{0.5} x$
$h(x) = \log_{0.9} x$

28. Calcular os logaritmos abaixo na base natural e na base 10

a) $\log_3(5)$

b) $\log_7(9)$

c) $\log_9(13)$

Respostas do Módulo 3

1. a) *v= 10 m/s* b) *S(t) = 10 + 10t*

****

2. a) *v= 10 m/s* b) *S(t) = 10 + 10t*

****

3. a) $x = 1$ e $x = 6$ b) $x = \frac{1 \pm i\sqrt{23}}{2}$

c) $x = -1$ e $x = -1$ d) $x = \pm\sqrt{3}$

e) $x = \pm 6$ f) $x = 4$ e $x = 4$

g) x = - 9 e x = - 9

****

4. a) ℝ b) ℝ c) ℝ

d) S = {x ∈ ℝ/ x ≠ 6}

e) S = {x ∈ ℝ/ x ≠ 0} f) ℝ

g)S = {x ∈ ℝ/ x ≥ 5} h) ℝ

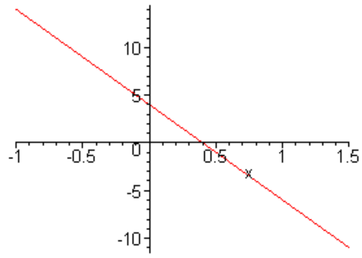
i) S = {x ∈ ℝ/ x ≠ $\frac{4}{3}$}

j) S={x ∈ ℝ/ x ≥ $-\frac{15}{4}$}

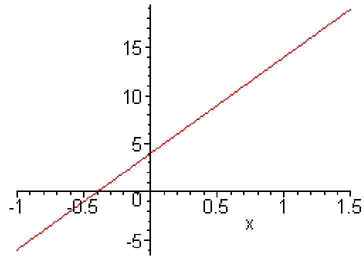
k) S={x ∈ ℝ/ x > $\frac{3}{4}$}

****

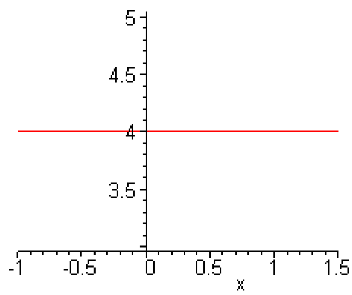
5. a)



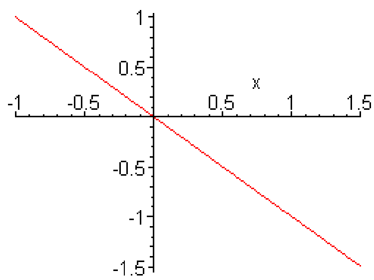
b)



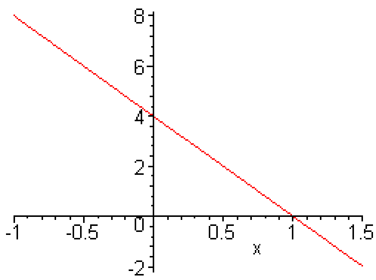
c)



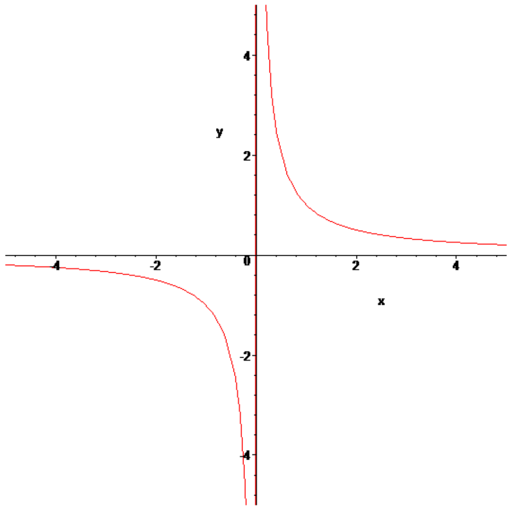
d)



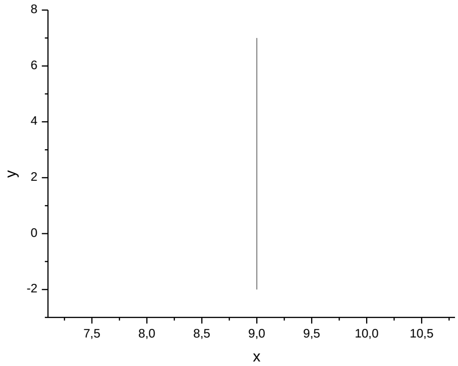
e)



f)



g)



****

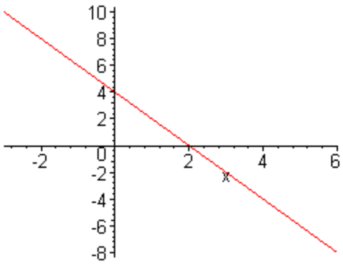
6. a) x = $-\frac{2}{5}$ b) x = 0 c) Não tem

d) x = 4 e) Não tem f) Não tem

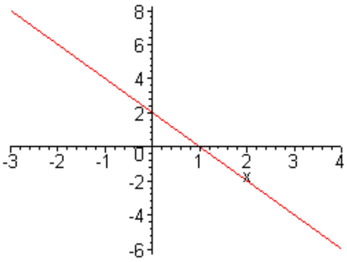
g) Não tem

****

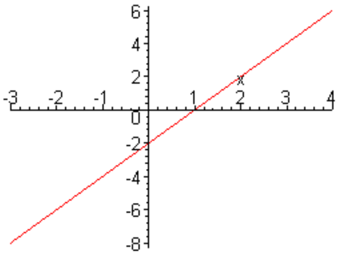
7. a) reta $y = -2x + 4$



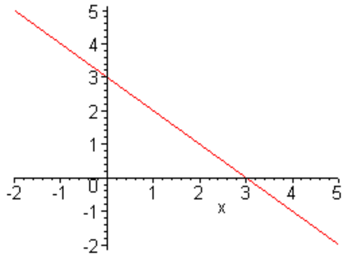
b) reta $y = -2x+2$



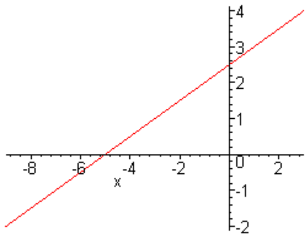
c) Reta $y = 2x - 2$



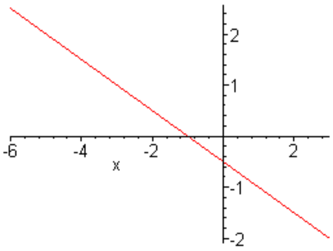
d) Reta $y = -x + 3$



e) reta $y = \frac{x+5}{2}$



f) reta $y = \frac{-x-1}{2}$



8. a) y = -x +1 b) y = $\frac{x+1}{2}$

c) y = $\frac{x+1}{2}$

****

9. y = $-\frac{3x}{2} + 3$ **10.** y = - x + 5

****

11. x = 2 **12.** ($\frac{1}{2}$, 0) e (0,1)

****

13. ($-\frac{1}{15}$, 0) corta o eixo x e não intercepta o eixo y.

****

14. y = 20x – 15 **15.** b = 5

****

16. Não existe (retas paralelas).

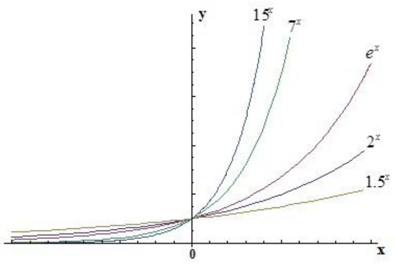
****

17. a) 6^3 b) 5^{2x} c) 1 d) e^{-5x} e) 7^{42} f) 42^x g) 6^5 h) $(7e)^2$ i) 9^2 j) e^6

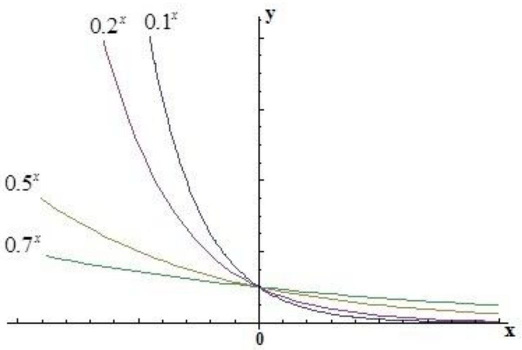
****

18.

a)



b)



19. $(f \circ f)(x) = (x+3)+3$

a) $(f \circ g)(x) = (\sqrt{x}+3)$

b) $(g \circ f)(x) = \sqrt{x+3}$

c) $(g \circ g)(x) = \sqrt[4]{x}$

****

20. $(h \circ g \circ f)(x) = e^{-x^2}$

****

21. $(g \circ f)(x) = \sqrt{2-\sqrt{x}}$

$D(g \circ f)(x) = [0,4]$

a) $(g \circ g)(x) = \sqrt{2-\sqrt{2-x}}$

$D(g \circ f)(x) = [-2,2]$

****

22.

a) $f^{-1}(x) = \dfrac{x-4}{3}$

b) $f^{-1}(x) = \dfrac{1+ax}{x}$

c) $f^{-1}(x) = \dfrac{a+ax}{x-1}$

d) $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x}, \quad x > 0$

e) $f^{-1}(x) = x^2 + 1, \quad x \geq 0$

f) $f^{-1}(x) = a - x^2, \quad x \leq 0$

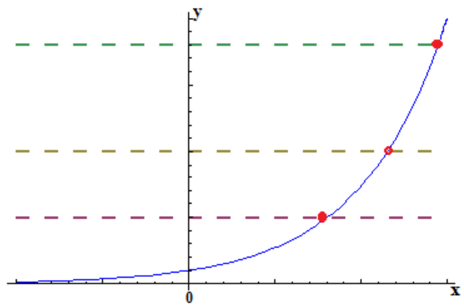
g) $f^{-1}(x) = \sqrt{\dfrac{x}{1-x}}, \quad 0 \leq x < 1$

h) $f^{-1}(x) = \sqrt{x+4}, \quad x \geq -4$

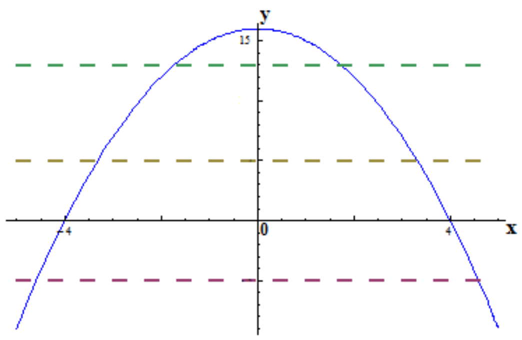
****

23.

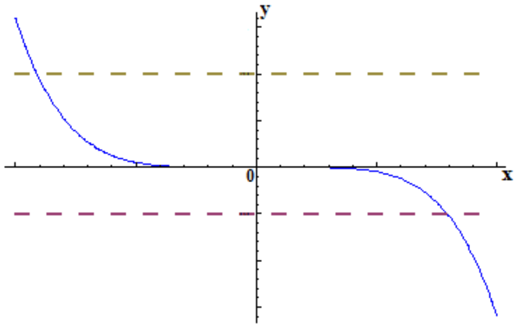
a) É uma função um a um.



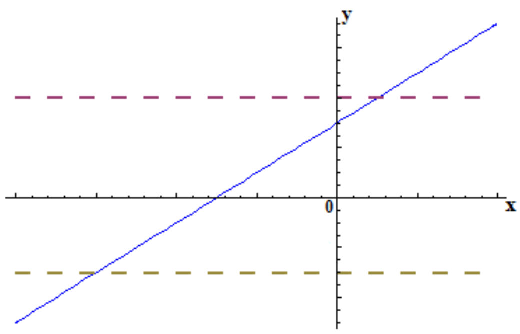
b) Não é uma função um a um.



c) É uma função um a um.



d) É uma função um a um.



****

24.

a) A função é um a um.
b) A função não é um a um.

****

25.

a) $3+2\log_3 x$ b) $\ln(x-1)$

c) $\log_2(x^3-1)-\log_2(x^2+2)$

d) $\ln x+\ln(x-1)$

e) $\log_{10} a+n\log_{10} x$

f) $\log_2\left(\dfrac{\sqrt{e}}{a^3}\right)$ g) $\log_{10} xy^n$

h) $\ln(x^2-1)$ i) $\ln\left(\dfrac{b(x^3-4)}{x+1}\right)$

****

26.

a) $x=e^5$ b) $x=10^{\frac{a}{b}}$

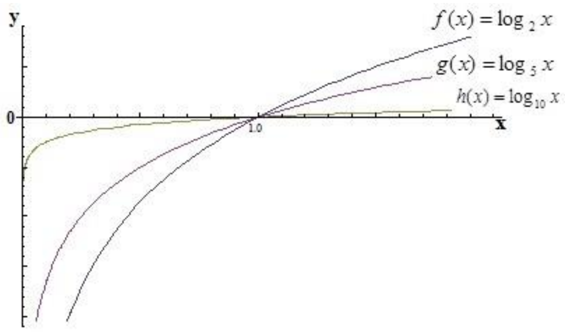
c) $x=\dfrac{\log_3 10-5}{2}$ d) $x=\sqrt{\log_2 e+1}$

e) $x=\dfrac{5-7^{-3}}{2}$ f) $x=-\dfrac{e}{1-2e}$

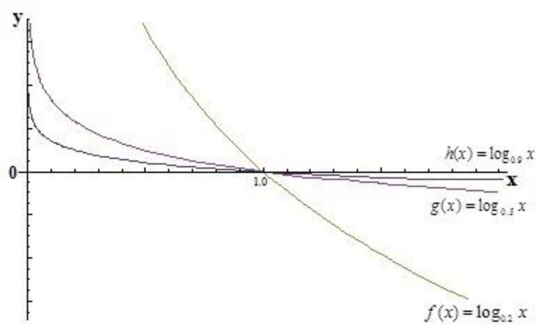
****

27.

a)



b)



28.

a) $\log_3(5)=\dfrac{\ln(5)}{\ln(3)}$, $\log_3(5)=\dfrac{\log_{10}(5)}{\log_{10}(3)}$

b) $\log_7(9)=\dfrac{\ln(9)}{\ln(7)}$, $\log_3(5)=\dfrac{\log_{10}(9)}{\log_{10}(7)}$

c) $\log_9(13)=\dfrac{\ln(13)}{\ln(9)}$, $\log_9(13)=\dfrac{\log_{10}(13)}{\log_{10}(9)}$

Módulo 4: Trigonometria

Trigonometria é o ramo da Matemática que trata das relações entre os lados e ângulos de triângulos (polígonos com três lados). Ao lidar com a determinação de pontos e distâncias em três dimensões, a trigonometria ampliou sua aplicação à Física, à Química e a quase todos os ramos da Engenharia, em especial no estudo de fenômenos periódicos como a vibração do som e o fluxo de corrente alternada.

1. Arcos e ângulos

Medindo arcos de circunferência: A medida do comprimento de um arco de circunferência pode ser feita utilizando-se qualquer das unidades usadas para medir seu raio, como o metro, o centímetro, etc. No entanto, medir o ângulo subentendido por um dado arco não requer o uso de unidades, ou seja, um ângulo é adimensional.

Usam-se diferentes medidas padrão para quantificar uma dada abertura subentendida por um arco. Por exemplo, o que se convencionou chamar de 1 *grau* de abertura foi o arco resultante da subdivisão de uma circunferência em 360 partes iguais; já o que se convencionou chamar de 1 *radiano* foi o arco subentendido por um comprimento exatamente igual ao raio da circunferência; chama-se de 1 *grado* a uma parte em 400 da circunferência. Sendo assim, existem diferentes maneiras de quantificar um determinado ângulo. Adota-se nas áreas de Matemática e Física a unidade *radiano* e nas Engenharias o *grau* é mais difundido.

Uma vez esclarecidas as definições das diferentes escalas de medidas de ângulos (arcos de circunferências) podemos estabelecer equivalências entre elas. Para este fim, vamos definir um número especial: π.

É fato que toda circunferência têm um determinado comprimento (C). É fato também que elas possuem um diâmetro (D). Embora não seja de óbvia visualização, um terceiro fato é que a razão entre a circunferência e o diâmetro (C/D) é um número constante e irracional. (Faça a experiência de medir o diâmetro de várias circunferências distintas e seu comprimento – use um barbante para esta última medida – e verifique se afirmação a respeito da razão C/D é verdadeira). Convencionou-se chamar a este número irracional de π. Assim, define-se:

$$\frac{C}{D} = \pi \cong 3{,}14159 \ldots \qquad (1)$$

Uma vez que $D=2R$, onde R é o raio da circunferência, obtemos a fórmula:

$$C = 2\pi R \qquad (2)$$

que fornece o comprimento total de uma circunferência.

Precisamos falar de π para estabelecer a relação entre as medidas de ângulos *graus* e *radianos*. Mas ainda falta uma coisa: descobrir a relação entre uma dada abertura subentendida por um arco de circunferência e o comprimento deste arco.

Pode-se notar que dada uma abertura qualquer θ, ela corresponderá a um comprimento S. Ao dobrarmos o ângulo de abertura, tomando 2θ ao invés de θ, e medirmos o comprimento correspondente a esta nova abertura, obteremos a medida $2S$, ao invés do S que tínhamos antes. Triplicando ou quadruplicando a abertura, correspondentemente triplicamos ou quadruplicamos o comprimento do arco. Concluímos assim que o comprimento de um arco é diretamente proporcional ao ângulo subentendido por este. Anotamos isso por:

$$S \propto \theta \qquad (3)$$

e a igualdade é estabelecida com o uso de uma constante k, a ser determinada:

$$S = k\theta \qquad (4)$$

Na equação (2) vimos que o comprimento de uma circunferência é dado por $2\pi R$, sendo R o raio da circunferência. Se convencionarmos chamar de 2π o **ângulo** que compreende uma volta inteira na circunferência, substituindo em (4) iremos obter:

$$S = k.2\pi \qquad (5)$$

que irá fornecer diretamente o valor de k:

$$k = R \qquad (6)$$

Isso se o ângulo foi medido em radianos. De modo justo o leitor irá perguntar: porque em radianos? Note que, caso k seja o próprio raio da circunferência teremos a seguinte relação entre comprimento de um arco qualquer e o ângulo que o mesmo subentende:

$$S = R\theta \Rightarrow \theta = \frac{S}{R} \qquad (7)$$

e notamos que, quando $\theta = 1$, o comprimento S será o próprio raio R da circunferência. Mas esta é a própria definição da escala de arcos *radiano*. Conclui-se disso que a escala natural para medida de arcos é a escala *radiano*, sendo o ângulo subentendido pela inteira circunferência de 2π *radianos*.

Caso o ângulo θ tivesse sido dado em graus, a constante de proporcionalidade k teria um valor diferente. Note que neste caso teríamos o ângulo total compreendido por uma volta completa na circunferência dado por *360 graus*. Consequentemente a expressão do comprimento de um arco é:

$$S = k.360 \qquad (8)$$

que quando comparada com a equação (2) fornece:

$$k = \frac{2\pi}{360}R \qquad (9)$$

que torna evidente o fato de que um grau corresponde exatamente a $1/360$ do comprimento total da circunferência, bastando fazer $\theta = 1$ na expressão (7).

Vamos estabelecer uma equivalência entre escalas de ângulos. Anteriormente determinamos duas constantes de proporcionalidade distintas para a medida do comprimento de um arco em função de um ângulo de abertura qualquer: uma constante para o ângulo de medida dado em graus e outra para o mesmo ângulo dado em radianos. Obviamente que o comprimento do arco não deve depender da constante de proporcionalidade. Essa é a observação crucial no estabelecimento da relação entre escalas desejada, pois:

$$S_{graus} = S_{radianos}$$

$$\frac{2\pi \cancel{R}}{360}\theta_{graus} = \cancel{R}\theta_{radianos}$$

$$\theta_{radianos} = \frac{\pi}{180}\theta_{graus} \qquad (10)$$

A relação acima pode ser usada para converter uma escala na outra, *radianos* em *graus* e vice-versa. Note que:

$$1° = \frac{\pi}{180} rad \cong 0{,}017453\, rad$$

ou, equivalentemente:

$$1\, rad = \frac{180°}{\pi} = 57{,}296°$$

Para finalizar a descrição de arcos e ângulos cabe notar que a escala *grau* é subdividida em *minutos* e *segundos* de acordo com a seguinte correspondência:

$$1° = 60'$$

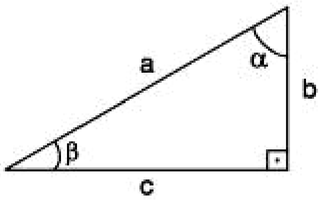
$$1' = 60''$$

onde usamos a notação '=*minuto* e *"=segundo*.

2. Razões Trigonométricas

O triângulo é retângulo quando um de seus ângulos internos é reto (ângulo *reto*= 90°).

Observe o triângulo retângulo ABC da figura abaixo, ele possui dois ângulos agudos α e β. **Nota:** *Ângulo agudo* é todo ângulo *menor* que *90°*. *Ângulo obtuso* é todo ângulo *maior* que *90°*.



É importante saber que:

a) Em relação ao ângulo α: **c** é *cateto oposto* (CO); **b** é *cateto adjacente* (CA).
b) Em relação ao ângulo β: **b** é CO; **c** é CA.
c) O lado do triângulo oposto ao ângulo reto é chamado de *hipotenusa* (HIP) do triângulo retângulo.

São definidas as seguintes **razões trigonométricas**:

✓ $\cos\alpha = \frac{CA}{HIP}$

✓ $\operatorname{sen}\alpha = \frac{CO}{HIP}$

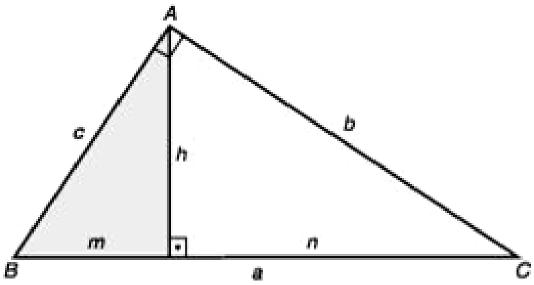
✓ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{CO}{CA} = \frac{CO}{CA}\frac{HIP}{HIP} = \frac{CO}{HIP}\frac{HIP}{CA} = \frac{CO/_{HIP}}{CA/_{HIP}}$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

onde ‘oposto’ e ‘adjacente’ referem-se ao ângulo α.

3. Relações Métricas

Para um triângulo retângulo ABC, podemos estabelecer algumas relações entre as medidas de seus elementos:

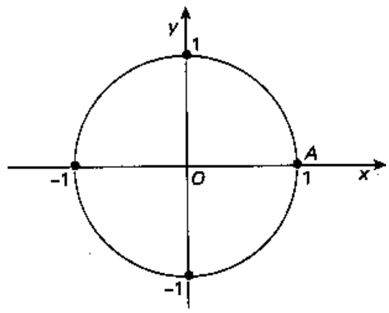


a) O quadrado de um cateto é igual ao produto da hipotenusa pela projeção desse cateto sobre a hipotenusa:
$$b^2 = a.n \quad \text{e} \quad c^2 = a.m$$
b) O produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura relativa à hipotenusa:
$$b.c = a.h$$
c) O quadrado da altura é igual ao produto das projeções dos catetos sobre a hipotenusa:
$$h^2 = m.n$$
d) O quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos:
$$a^2 = b^2 + c^2$$

Essa relação é conhecida pelo nome de *Teorema de Pitágoras.*

3.1 Circunferência Trigonométrica

Consideremos uma circunferência de raio unitário ($r = 1$), cujo centro coincide com a origem de um sistema cartesiano ortogonal:



Esta estrutura, juntamente com as convenções a seguir, é chamada de *circunferência trigonométrica*.

Convenções:

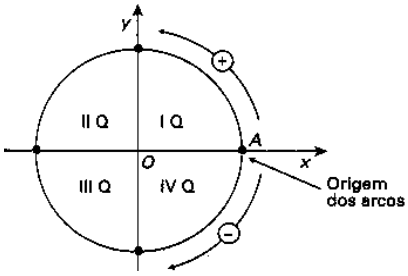
I. O ponto A=(1,0) é a origem de todos os arcos a serem medidos na circunferência.

II. Se um arco for medido no sentido horário, então a essa medida será atribuído o sinal negativo (-).

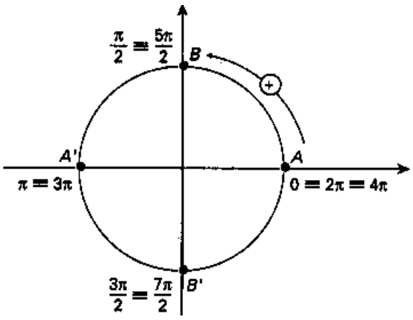
III. Se um arco for medido no sentido anti-horário, então a essa medida será atribuído o sinal positivo (+).

IV. Os eixos coordenados dividem o plano cartesiano em quatro regiões chamadas quadrantes; esses quadrantes são contados no sentido anti-horário, a partir do ponto A.

Como a circunferência tem 360º ou 2π *rad*, cada um desses arcos medem 90º ou π/2 *rad*.



<u>*OBS*</u>: Se temos um arco de origem A e extremidade E, ele pode assumir infinitos valores, dependendo do número de voltas que sejam dadas para medi-lo, tanto no sentido anti-horário (+) quanto no sentido horário (-).



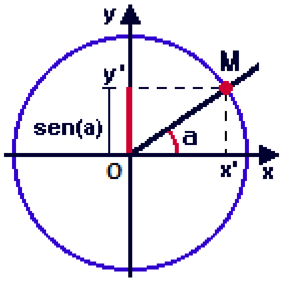
Usaremos a circunferência trigonométrica para definir as funções trigonométricas, mais adiante. Por agora vamos trabalhar apenas com um triângulo retângulo.

4. A generalização das razões trigonométricas

Como vimos anteriormente, as razões trigonométricas seno (*sen*), cosseno (*cos*) e tangente (*tg*), referem-se a ângulos agudos de um triângulo retângulo. No entanto, pode-se estender a definição destas razões a ângulos obtusos, conforme veremos a seguir.

<u>Extensão do seno de um ângulo:</u>

No plano cartesiano, consideremos uma circunferência trigonométrica, de centro em (0,0) e raio unitário. Seja $\boldsymbol{M = (x', y')}$ um ponto desta circunferência, localizado no primeiro quadrante, este ponto determina um arco **aM** que corresponde ao ângulo central **a**.



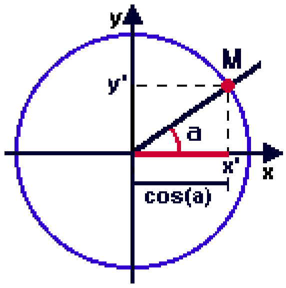
Relembrando, chamamos de *sen* α à razão entre o *CO* a α, cujo tamanho é dado pela própria ordenada ***y'*** do ponto **M,** e a *HIP*, cujo tamanho é a própria distância **r=1**; isto é:

$$sen(a) = \frac{y'}{r} = \frac{y'}{1} = y'$$

Com isso a extensão é feita de modo que o sinal do seno dependerá do sinal da ordenada do ponto, ou seja, do quadrante a que pertença o ângulo. Será positivo para o primeiro e o segundo quadrantes (ordenadas positivas), e negativo para o terceiro e o quarto quadrantes (ordenadas negativas).

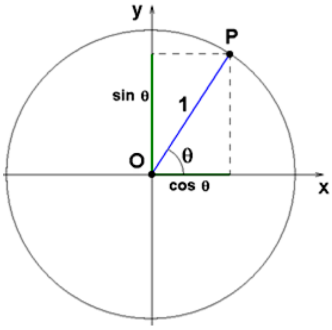
<u>Extensão do cosseno de um ângulo:</u>

Conforme definimos para o triângulo retângulo, a razão entre o *CA* a α, a abscissa ***x'*** do ponto **M** usado anteriormente, e a HIP, distância **r**, será o cosseno do ângulo *a*:



$$cos(a) = \frac{x'}{r} = x'$$

O sinal do cosseno de um ângulo depende do sinal da abscissa do ponto. Sendo assim, *cos* α será positivo no primeiro e no quarto quadrantes e negativo nos segundo e terceiro quadrantes.



$$sen\alpha = \frac{y}{1} = y$$

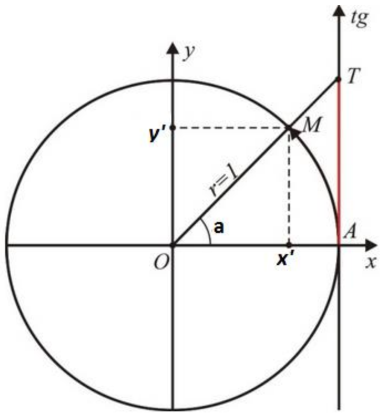
$$\cos\alpha = \frac{x}{1} = x$$

O triângulo OxP, é um triângulo retângulo. Se $\text{sen}\alpha = y$ e $\cos\alpha = x$, pelo teorema de Pitágoras temos:

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$a^2 = x^2 + y^2 = \cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha$$
$$\mathbf{cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1}$$

Extensão da tangente de um ângulo:

A tangente de um ângulo, conforme vimos em nosso estudo do triângulo retângulo, é a razão entre o *CO* e o *CA*:



Observando o ciclo trigonométrico, podemos tirar as seguintes relações:

$$\frac{Ox'}{OA} = \frac{x'M}{AT}$$

Ora, *Ox'* é o cosseno, *x'M* é a projeção do seno e *AT* é a tangente e *AO* é o raio do ciclo, igual a 1:

$$\frac{\cos a}{1} = \frac{\text{sen a}}{\text{tg a}} \Rightarrow \text{tg a} = \frac{\text{sen a}}{\cos a}$$

O sinal da tangente dependerá do sinal das coordenadas do ponto **M** escolhido. Será positiva se as coordenadas forem do mesmo sinal e negativa se forem de sinais contrários.

Conforme se pode notar nas duas extensões sugeridas para tangente, quando o denominador da fração for nulo a tangente não está definida. Isso ocorre quando a abscissa do ponto **M** é nula, ou equivalentemente, o ângulo α vale 90º ou 270º (Pois $\cos 90^o = 0 = \cos 270^o$).

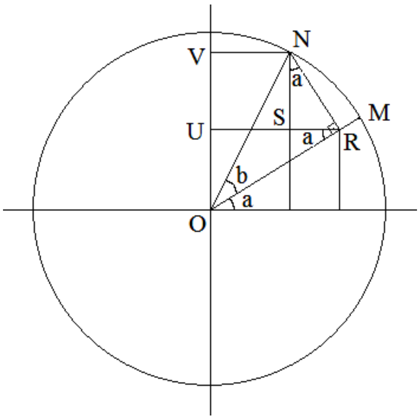
5. Soma e diferença de dois arcos

Seno da soma de dois arcos

$$\boxed{\text{sen}(a+b) = \text{sen a} \cdot \cos b + \text{sen b} \cdot \cos a}$$

Demonstração:

Observe a seguinte figura (circunferência trigonométrica):



Inicialmente temos de notar que:

$$sen(a+b) = OU + UV$$

O triângulo ONR fornece as seguintes relações:

$$sen(b) = \frac{NR}{1} = NR$$

$$\cos(b) = \frac{OR}{1} = OR$$

Por outro lado, o triângulo OUR nos diz que:

$$sena = \frac{OU}{OR} = \frac{OU}{\cos b} \Rightarrow OU = sena\cos b$$

Por sua vez, o triângulo NRS fornece:

$$\cos a = \frac{NS}{NR} = \frac{NS}{senb} \Rightarrow NS = \cos a senb$$

Notando que:

$$NS = UV$$

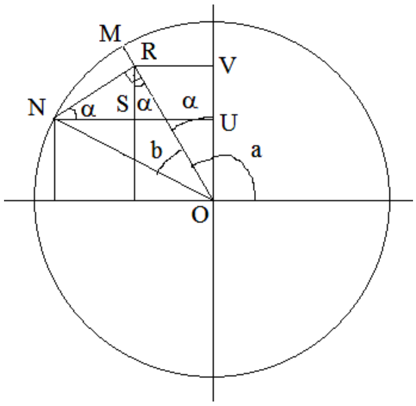
obtemos finalmente:

$$\mathrm{sen}(a+b) = \mathrm{sen}\, a \,.\, \cos b + \mathrm{sen}\, b \,.\, \cos a$$

como queríamos demonstrar.

Embora tenhamos demonstrado a igualdade acima apenas para o primeiro quadrante, o resultado é válido para qualquer destes. A demonstração para os outros quadrantes é análoga, fazendo-se as devidas correções de sinais. Apenas a critério de exemplo faremos mais uma demonstração, a do segundo quadrante.

Observe agora esta nova figura:



Novamente notamos que:

$$sen(a+b) = OV - UV$$

Definimos o ângulo auxiliar $\alpha = a - 90^o$

O triângulo ORN fornece as relações:

$$sen b = \frac{NR}{1} \Rightarrow NR = sen b$$

$$\cos b = \frac{OR}{1} \Rightarrow OR = \cos b$$

O triângulo NRS fornece:

$$sen\alpha = \frac{RS}{NR} \Rightarrow RS = sen\alpha . sen b = UV$$

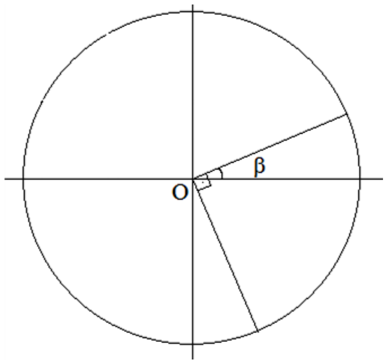
Por sua vez, o triângulo OVR fornece:

$$\cos\alpha = \frac{OV}{OR} \Rightarrow OV = \cos\alpha \cos b$$

Temos então como resultado parcial:

$$sen(a+b) = \cos\alpha \cos b - sen\alpha . sen b$$

Mas, observando o seguinte desenho:



Notamos que:

$$sen(\beta - 90^o) = -\cos\beta$$

$$\cos(\beta - 90^o) = sen\beta$$

Então, ocorre que:

$$sen\alpha = -\cos a$$

$$\cos\alpha = sen a$$

Substituindo no resultado parcial obtemos a relação desejada:

$$\mathrm{sen}(a+b) = \mathrm{sen}\, a \,.\, \cos b + \mathrm{sen}\, b \,.\, \cos a$$

o que conclui a demonstração para um ângulo no segundo quadrante.

<u>Seno da diferença de dois arcos</u>

$$\boxed{\mathrm{sen}(a-b) = \mathrm{sen}\, a \,.\, \cos b - \mathrm{sen}\, b \cos a}$$

<u>Demonstração:</u>

Podemos reescrever o seno da diferença como:

$$sen(a-b) = sen[a + (-b)]$$

e aplicar a fórmula da soma, obtendo:

$$sen(a-b) = sen a \cos(-b) + sen(-b)\cos a$$

Uma vez notando que o cosseno de um ângulo corresponde à abscissa do sistema cartesiano que contém a circunferência trigonométrica, é fácil ver que:

$$\cos(-b) = \cos b$$

e que:

$$sen(-b) = -sen b$$

Com esses resultados estabelece-se a

igualdade requerida:

$$sen(a-b) = sena\cos b - senb\cos a$$

completando a demonstração.

Cosseno da soma de dois arcos

$$\boxed{\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b}$$

Demonstração:

Para demonstrar este resultado devemos notar as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(c+90°) &= \operatorname{sen} c \cos 90° + \operatorname{sen} 90° \cos c \\ &= \mathbf{\cos c} \\ \operatorname{sen}(c+180°) &= \operatorname{sen} c \cos 180° \\ &\quad + \operatorname{sen} 180° \cos c \\ &= \mathbf{-\operatorname{sen} c} \end{aligned}$$

uma vez que $\cos 90^o = 0$, $sen 90^o = 1$, $\cos 180^o = -1$ e $sen180^o = 0$. (Ver as figuras que estendem as definições de senos e cossenos para quaisquer ângulos, notando as coordenadas das interseções da circunferência trigonométrica com os eixos coordenados). Sendo assim, temos:

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= sen(a+b+90^o) \\ &= sen(a+90^o)\cos b \\ &\quad + senb\cos(a+90^o) \\ &= \cos a \cos b \\ &\quad + senb.sen(a+90^o+90^o) \\ \cos(a+b) &= \cos a \cos b - senb.sena \end{aligned}$$

conforme desejávamos.

Cosseno da diferença de dois arcos

$$\boxed{\cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}$$

Demonstração:

Reescrevemos o cosseno desejado como:

$$\cos(a-b) = \cos(a+(-b))$$

e usamos a fórmula da soma de cossenos:

$$\begin{aligned} \cos(a-b) &= \cos a \cos(-b) - sena.sen(-b) \\ &= \cos a \cos b - sena(-senb) \\ \cos(a-b) &= \cos a \cos b + senasenb \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração.

Tangente da soma ou da diferença de dois arcos

$$\boxed{\operatorname{tg}(a \pm b) = \frac{\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b}{1 \mp \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}}$$

onde deve-se usar somente o sinal superior ou somente o inferior.

Demonstração:

Usamos os resultados obtidos para seno e cosseno da soma de dois arcos:

$$\begin{aligned} tg(a \pm b) &= \frac{sen(a \pm b)}{\cos(a \pm b)} \\ &= \frac{sena\cos b \pm senb\cos a}{\cos a \cos b \mp sena.senb} \\ &= \frac{\cos a}{\cos a} \cdot \frac{tga\cos b \pm senb}{\cos b \mp tgasenb} \\ &= \frac{\cos b}{\cos b} \cdot \frac{tga \pm tgb}{1 \mp tga.tgb} \\ tg(a \pm b) &= \frac{tga \pm tgb}{1 \mp tga.tgb} \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

6. Fórmulas de arcos duplos

Chama-se de arco duplo à soma de dois arcos iguais. Sendo assim, para escrevermos as fórmulas de arcos duplos basta igualar os dois arcos e obter as expressões correspondentes. Chamaremos este arco que se repete duas vezes de *x* ao invés de *a* ou *b*.

O seno de um arco duplo

Temos neste caso:

$$\begin{aligned} sen2x &= sen(x+x) \\ &= senx\cos x + senx\cos x \end{aligned}$$

Então:

$$\boxed{sen2x = 2senx\cos x}$$

O cosseno de um arco duplo

Neste caso temos:

$$\cos 2x = \cos(x + x)$$
$$= \cos x \cos x - senx.senx$$

ou seja:

$$\boxed{\cos 2x = \cos^2 x - sen^2 x}$$

Notando que, pelo teorema de Pitágoras e por ser o raio de uma circunferência trigonométrica igual a 1, temos a identidade fundamental:

$$\boxed{\cos^2 x + sen^2 x = 1}$$

Esta identidade permite reescrever a fórmula para o cosseno do arco duplo de duas outras maneiras equivalentes:

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$
$$\cos 2x = 1 - 2sen^2 x$$

A tangente de um arco duplo

Temos, neste caso:

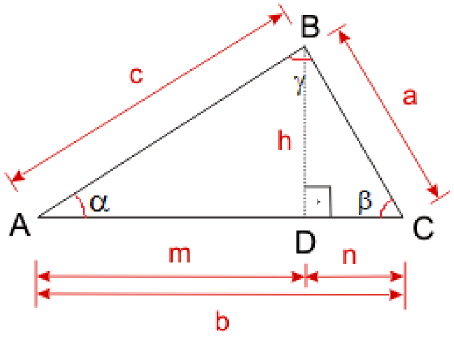
$$tg2x = tg(x + x)$$
$$= \frac{tgx + tgx}{1 - tgx.tgx}$$

ou seja,

$$\boxed{tg2x = \frac{2tgx}{1 - tg^2 x}}$$

7. Lei dos Cossenos

Pode-se estabelecer algumas relações entre ângulos e lados de um triângulo *qualquer*:



Na figura acima, opserva-se 3 triângulos: ABC, ABD e BDC. Nota-se que:

$$b = n + m \quad \text{e} \quad m = c.\cos\alpha \qquad (11)$$

Usando o teorema de Pitágoras para BCD:

$$a^2 = h^2 + n^2 \qquad (12)$$

E para ABD:

$$c^2 = m^2 + h^2 \qquad (13)$$

Substituindo, $n = b - m$ e $h^2 = c^2 - m^2$, na relação (12), temos:

$$a^2 = (b - m)^2 + (c^2 - m^2)$$
$$= b^2 + \cancel{m^2} - 2bm + c^2 - \cancel{m^2}$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bm$$

Mas $m = c.\cos\alpha$, assim:

$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\alpha}$$

De forma análoga temos:

$$\boldsymbol{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos\beta}$$
$$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\gamma}$$

8. As razões recíprocas

Além das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente, podemos definir os recíprocos destas frações. Chamaremos de *secante* (*sec*) ao recíproco do cosseno, *cossecante* (*cossec*) ao recíproco do seno, e finalmente *cotangente* (*cot*) ao recíproco da tangente, ou seja:

$$\boxed{\begin{aligned} \sec\alpha &= \frac{1}{\cos\alpha} \\ \operatorname{cossec}\alpha &= \frac{1}{sen\alpha} \\ \cot g\alpha &= \frac{1}{tg\alpha} \end{aligned}}$$

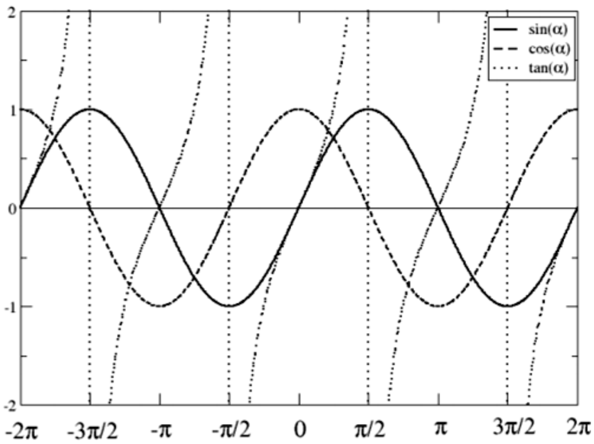
Pode-se trabalhar com somas e diferenças de arcos para estas razões utilizando os resultados que já conhecemos para as funções seno, cosseno e tangente.

9. Representação gráfica das razões trigonométricas e suas recíprocas

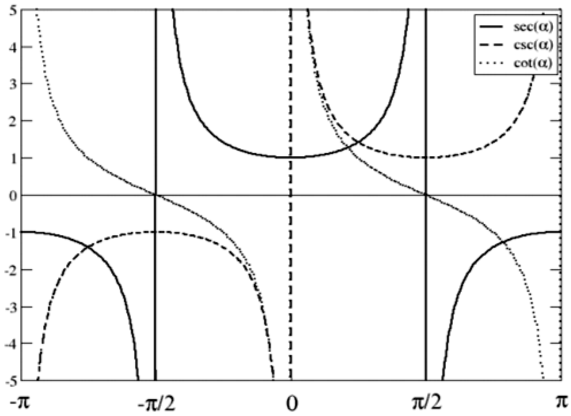
	sen	**cos**	**tg**
30º	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45º	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60º	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	-
120°	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$-\sqrt{3}$
150°	$1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/3$
180°	0	-1	0

Para finalizar esta seção apresentaremos os gráficos das razões trigonométricas e de suas recíprocas.

Para seno, cosseno e tangente, temos:

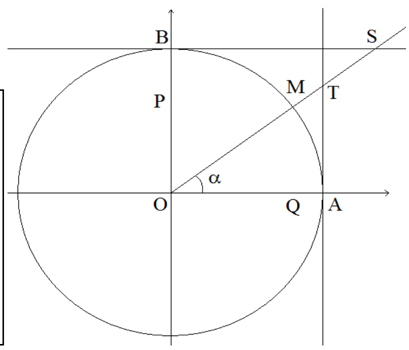


Já para secante, cossecante e cotangente temos:



E por último apresentamos cada uma das razões trigonométricas, bem como suas recíprocas, na circunferência trigonométrica, para facilitar memorização e visualização de relações entre elas (às vezes uma visão geométrica é mais fácil de ver que uma analítica!). Também uma tabela com valores de seno, cosseno e tangente de alguns ângulos.

$$sen\,\alpha = OP$$
$$\cos\alpha = OQ$$
$$tg\,\alpha = AT$$
$$\cot g\,\alpha = BS$$
$$\sec\alpha = OT$$
$$cossec\,\alpha = OS$$



(Figura extraída de KÜHLKAMP, Nilo. *Cálculo 1*, 2ed., Editora da UFSC, 2001, p.57)

Exercícios Propostos

1. Calcular os catetos de um triângulo retângulo cuja hipotenusa mede 6 cm e um dos ângulos mede 60º.
2. Quando o ângulo de elevação do sol é de 65 º, a sombra de um edifício mede 18 m. Calcule a altura do edifício. (sen 65º = 0,9063, cos 65º = 0,4226 e tg 65º = 2,1445)

3. Quando o ângulo de elevação do sol é de 60º, a sombra de uma árvore mede 15m. Calcule a altura da árvore, considerando $\sqrt{3} = 1{,}7$.

4. Uma escada encostada em um edifício tem seus pés afastados a 50 m do edifício, formando assim, com o plano horizontal, um ângulo de 32º. A altura do edifício é aproximadamente: (sen 32º = 05299, cos 32 º = 0,8480 e tg 32º = 0,6249)

5. Um avião levanta vôo sob um ângulo de 30º. Depois de percorrer 8 km, o avião se encontra a uma altura de:

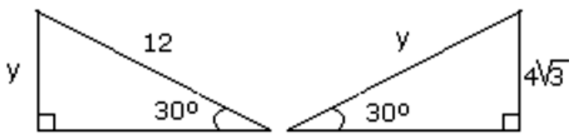
6. Um foguete é lançado sob um ângulo de 30º. A que altura se encontra depois de percorrer 12 km em linha reta?

7. Do alto de um farol, cuja altura é de 20 m, avista-se um navio sob um ângulo de depressão de 30º. A que distância, aproximadamente, o navio se acha do farol? (Use √3 = 1,73)

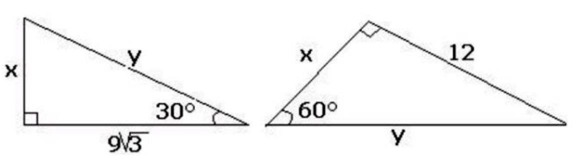
8. Se cada ângulo de um triângulo eqüilátero mede 60 º, calcule a medida da altura de um triângulo eqüilátero de lado 20 cm.

9. Um alpinista deseja calcular a altura de uma encosta que vai escalar. Para isso, afasta-se, horizontalmente, 80 m do pé da encosta e visualiza o topo sob um ângulo de 55º com o plano horizontal. Calcule a altura da encosta. (Dados: sen(55º) = 0,81, cos (55º) = 0,57 e tg (55º) = 1,42.

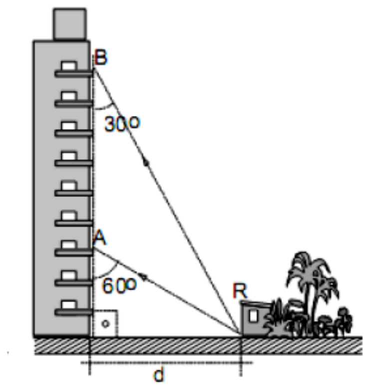
10. Calcule o valor de y em cada figura:



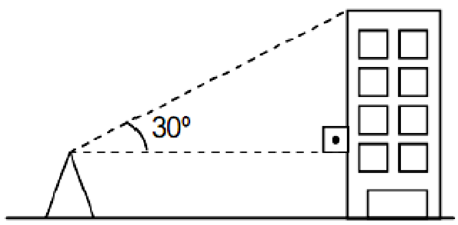
11. Encontre x e y nas figuras:



12. Patrik, um jovem curioso, observa da janela do seu quarto (A) uma banca de revistas (R), bem em frente ao seu prédio, segundo um ângulo de 60° com a vertical. Desejando avaliar a distância do prédio à banca, Patrik sobe seis andares (aproximadamente 16 metros) até o apartamento de um amigo seu, e passa a avistar a banca (do ponto B) segundo um ângulo de 30° com a vertical. Calculando a distância "d", Patrik deve encontrar, aproximadamente, o valor:



13. Um topógrafo foi chamado para obter a altura de um edifício. Para fazer isto, ele colocou um teodolito (instrumento para medir ângulos) a 200 m do edifício e mediu o ângulo de 30°, como indicado na figura a seguir. Determine a altura do edifício.



14. Determine o valor da expressão: y = 4·cos105°

15. Sabendo-se que sen(x) = $\frac{3}{5}$ e que x pertence ao primeiro quadrante, determine sen(2x).

16. Se tg (x + y) = 2 e tg (y) = 1, determine tg (x).

17. Sabendo que $sena - \cos a = \frac{2}{5} sena$

Determine o valor de $sen2a$.

18. Determine o valor de cos(105°).

19. Simplifique a expressão:

$$y = \frac{\sec x - \cos x}{\cos\sec x - senx}$$

Respostas do Módulo 4

1. $3\sqrt{3}$ e 3 **2.** 38,6m **3.** 25,5m
****
4. 31,24 m **5.** 4 Km **6.** 6 Km
****
7. 34,7 m **8.** $10\sqrt{3}$ **9.** 113,6m
****
10. a) y = 6 b) $8\sqrt{3}$
****
11. a) x = 9 e y = 18 b) x = $4\sqrt{3}$ e y = $8\sqrt{3}$
****
12. 13,84 m **13.** $200\frac{\sqrt{3}}{3}$ m
****
14. $\sqrt{2} - \sqrt{6}$ **15.** 24/25 **16.** 1/3
****
17. 15/17 **18.** $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$
****
19. $tg^3(x)$
****

Referências Bibliográficas

[1] PAIVA, Manoel. Matemática, 1ª ed. São Paulo, Moderna, 2004.

[2] EDWALDO BIANCHINI. Matemática - 5ª a 8ª Série**.** – Editora Moderna.

[3] Iezzi, G.: *Fundamentos de Matemática Elementar*, vol. 1, Atual Editora.

[4] Iezzi, G.: Fundamentos de Matemática Elementar, vol. 2, Atual Editora.

[5] DANTE, Luiz Roberto. Tudo é Matemática. 9ª ano. São Paulo: Ática, 2009

[6] BIANCHINI, Edwaldo. Matemática: volume I. 4. ed.rev. e ampl. São Paulo, Moderna, 1996.

[7] KÜHLKAMP, Nilo. *Cálculo 1*, 2ed., Editora da UFSC, 2001.

[8] PEDUZZI, L. O. Q.; PEDUZZI, S. S. **Física Básica A**, 2ª Ed, Florianópolis: UFSC/EAD/CED/CFM, 270 p, 2009.